Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 36, 4, 2024. (111-138)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Society of Manufacturing Engineering of Iran

Modeling and Simulation of Contact and Friction Forces in Flexible Robotic Arms*

Research Article

Mohamad E Yousefzadeh[1], Ali Mohamad Shafei[2]

https://doi.org/10.22067/jacsm.2024.88007.1256

Abstract *This study investigates the dynamics of planar open-loop robotic systems with n-link elastic arms connected via revolute joints, focusing on multiple collision phenomena. The equations of motion are derived using the recursive Gibbs-Appell algorithm, and collision-contact dynamics are modeled with a regulated approach. Transverse vibrations of the links are modeled using the Timoshenko beam theory, incorporating structural damping and air resistance for improved accuracy. The joints are assumed to be frictionless and backlash-free, while friction forces are considered at ground contact points. The system operates in two phases: flight and collision. During collisions, viscoelastic forces introduce stiff differential equations, requiring special handling due to the short collision duration. Accurate detection of collision onset and termination is achieved using a novel computational algorithm. To validate the model, the dynamic behavior of a three-link robotic system is simulated. Four distinct mode shapes are used to analyze their effects on the elastic deformation of the links. A comparative analysis highlights the influence of mode shapes on system behavior, demonstrating the framework's precision and efficiency in modeling and simulation.*

Key words: Mode shape, Gibbs-Appell, Friction, Elastic robot, Contact forces

1-Introduction

Flexible robots have garnered increased attention in research and development due to their numerous advantages, such as being lighter, consuming less energy, and performing more complex tasks. This paper investigates and simulates the contact and friction forces in flexible robotic arms. The primary objective of this research is to model and analyze the contact-impact phenomenon in robotic systems with flexible links. By employing precise modeling and analyzing dynamic forces, this study aims to optimize the movement and control of these robots.

This article highlights the importance of the relative indentation of two bodies in calculating contact force in continuous models and examines the impact of various parameters such as surface geometry, stiffness, adhesion, and slipperiness on the magnitude of collision forces. Several studies on collision models and the effects of friction in multi-body systems are reviewed. Zheng and Zheng studied the impact of joint clearance in 3-RRR and 4-RRR mechanisms. Li et al. proposed a method for generating practical paths in robotic systems, and Yang et al. derived the dynamic model of mechanisms with clearance. Finally, Shafei and Shafei conducted dynamic modeling of robotic systems in contact with the environment.

2. Dynamic Motion Equations

The dynamic motion equations of robotic systems are derived using the recursive Gibbs-Appell algorithm and a regularized approach to model the contact-impact phenomenon. These equations incorporate various forces, such as contact forces and frictional forces, at points where the links collide with the ground. To enhance modeling accuracy, the transverse vibrations of the links are calculated using Timoshenko beam theory, considering both structural and air damping effects. This modeling enables precise prediction of the robot's dynamic behavior under diverse conditions (Fig. 1).

In this article, the system's differential equations include Gibbs acceleration, elastic potential energy, and energy dissipated due to structural and air damping. These equations are formulated in two phases: motion suspended in the air and motion involving ground contact. During the flight phase, only gravitational force is considered as an external force, and the equations are expressed in inverse and direct dynamic forms. The system's total inertia matrix

*Manuscript received: May 9, 2024. Revised, May 29, 2024, Accepted, June 29, 2024.

[1] M.Sc Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

[2] Corresponding Author: Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. **Email**: shafei@uk.ac.ir

and the vector of remaining dynamic terms are key components of these equations, calculated using the recursive Gibbs-Appell algorithm.

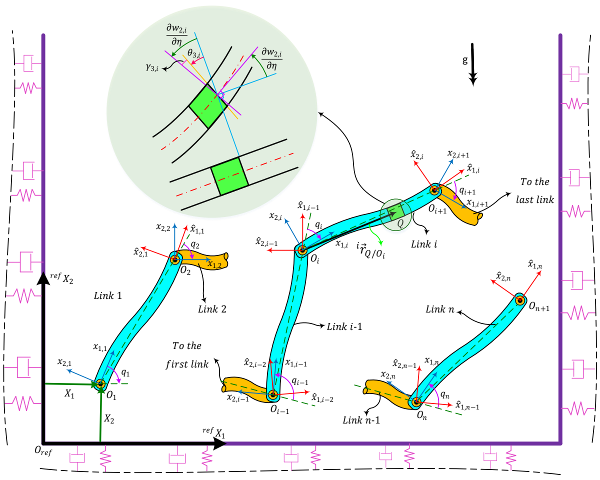


Figure 1. A chain of flexible free-falling links

3. System Motion Phases

The system's motion consists of two phases: flight and collision. In the flight phase, the robot moves freely without any contact with the ground. Conversely, in the collision phase, contact occurs between the robot's links and the ground. During this phase, the system's differential equations include viscoelastic forces, which require special computational measures due to the brief duration of the collision. To precisely control the moment of collision and the exit from it, a specific computational algorithm has been employed, enabling a smooth transition between the two phases with high accuracy (Fig. 2).

The system begins its motion in the flight phase; therefore, the equations for this phase are derived first. In the flight phase, apart from the gravitational force, the effects of strain potential energy and energy dissipation factors (including air damping and structural damping) are included on the left side of the equation. No other external forces act on the system, and thus, the right side of the equation equals zero. This equation represents the inverse dynamics form of the system under study.

In the collision phase, it is assumed that the robotic system contacts the ground only at the extremities of its links. In this phase, the system experiences vertical forces from impact and frictional forces due to contact between the links and the ground. Consequently, in this phase, the generalized forces resulting from these two forces replace the UjU_jUj terms in the equation.

To solve the differential equations of motion, an algorithm based on the Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) method has been developed. This algorithm allows the time step to be automatically adjusted during the impact period, minimizing numerical error while meeting the desired accuracy. In simulations, accurately determining the moment of impact is of paramount importance. Failure to accurately identify the impact moment disrupts the energy balance in the system, leading to unrealistic results. To address this challenge, a computational algorithm has been proposed to precisely detect the moment of impact.

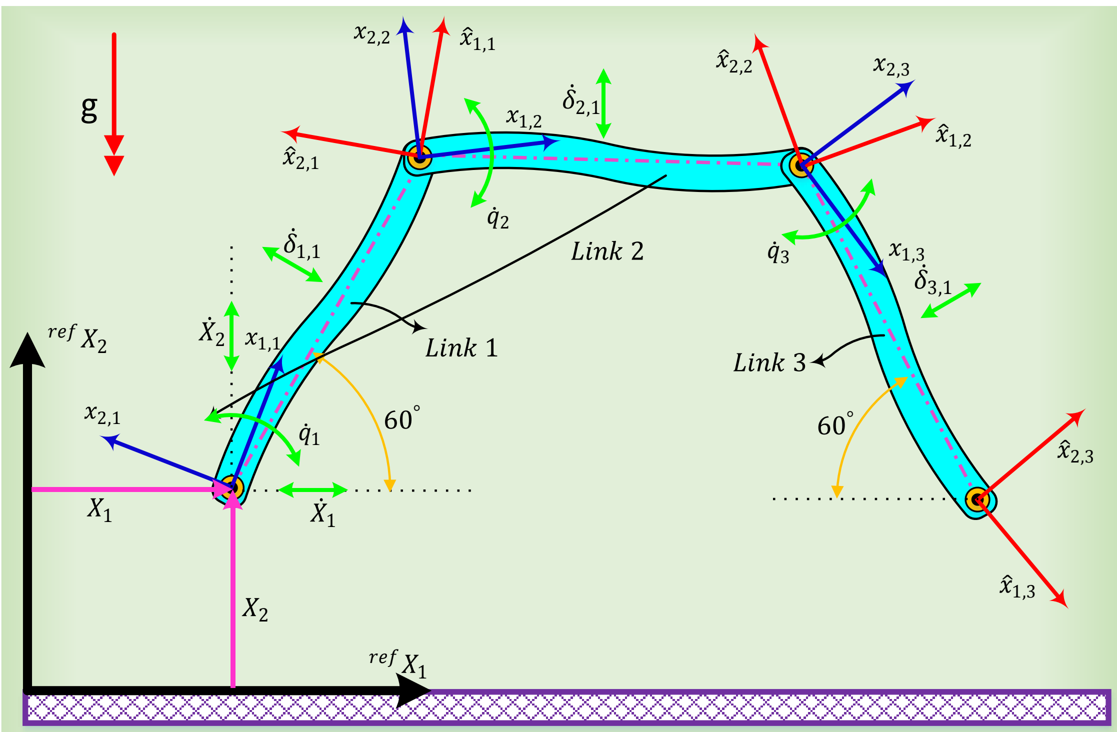


Figure 2. Falling three-link elastic robot

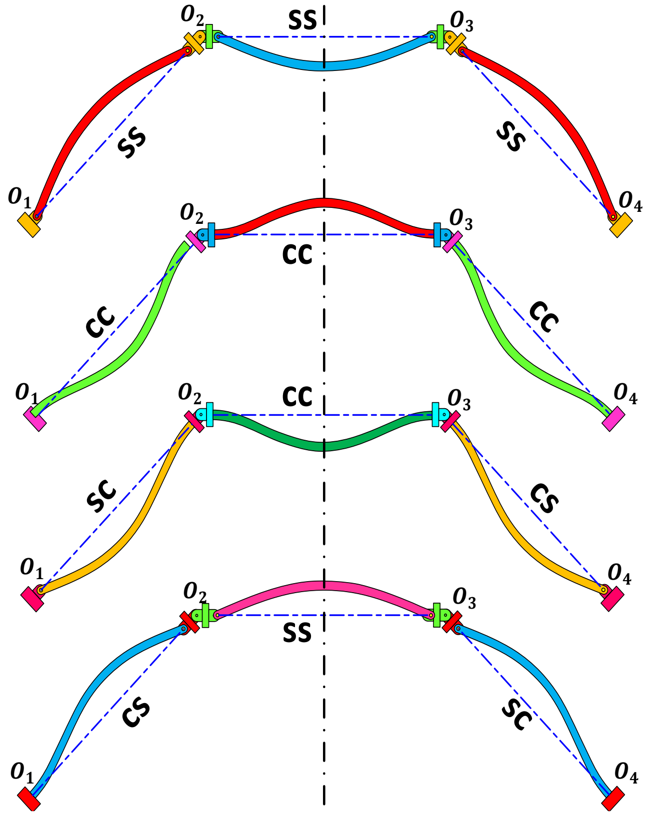


Figure 3. Schematic figure of mode shapes used in simulation

4-Contact Force

In this research, the mathematical modeling of the impact-contact phenomenon has been carried out using a regularized method. The contact force is expressed as a function of the relative indentation of two bodies and its derivative. There are different models for calculating the contact force, with variations in how this force is computed. Initial models like Hertz's model and contemporary models based on the Hunt-Crossley model have been developed. These models allow us to calculate the contact force between the robot's links and the ground with greater accuracy.

5-Friction Force

Friction, as a critical factor influencing the system, can cause energy dissipation, noise, vibration, and changes in system parameters. Friction models are categorized into static and dynamic types. Dynamic models better describe the system's transient state and include an additional variable for modeling the friction force. In this paper, the friction force resulting from sliding and sticking at the contact points for flexible robotic arms has been modeled and simulated. This modeling enables us to examine the impact of friction force on the robot's dynamic behavior with greater precision.

6-Simulation and Results

To demonstrate the efficiency and accuracy of the developed program, computer simulations were conducted to study the dynamic behaviour of a three-link robotic system. These simulations allow us to investigate various effects, including the elastic deformations of the links. Four different mode shapes were used for this purpose, and their results were compared. This comparison indicates that the choice of different mode shapes significantly impacts the system's dynamic behavior. To maintain the symmetry of the system, various boundary conditions, including simple and clamped supports, have been selected. The simulation results show that the system experiences different displacements and oscillations under these various boundary conditions. The joint displacement diagrams clearly illustrate these changes in different directions, showing that the amplitude of vibrations and the frequency of oscillations differ for various mode shapes. For instance, in the boundary conditions cc-cc-cc and sc-cc-cs, the oscillation amplitudes are lower and the vibration frequencies are higher compared to the boundary conditions cs-ss-sc and ss-ss-ss. Furthermore, by examining the system's energy error percentage diagrams, it is observed that the more constrained the system is, the lower the computational error and the better the symmetry is preserved. These results indicate that the choice of boundary conditions and mode shapes has a direct impact on the dynamic behavior of the system and can be utilized to optimize the performance of robots under different conditions.

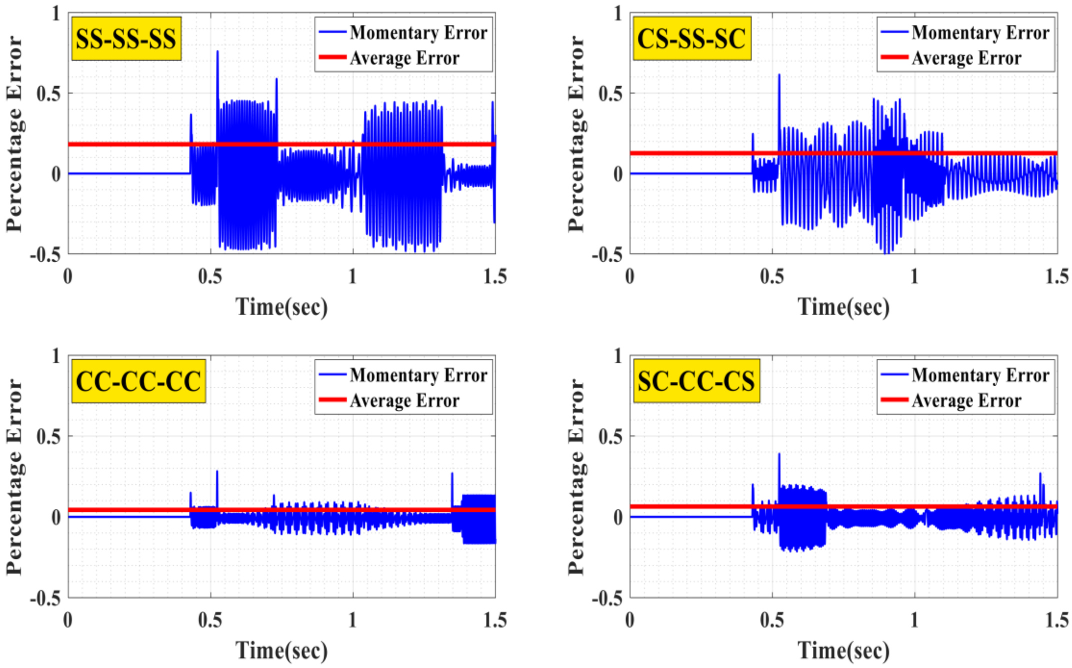


Figure 4. System energy error percentage in terms of time

7-Conclusion

The dynamic modeling of a two-dimensional open-chain robotic system with *n* elastic links in the flight and collision phases has been performed using the recursive Gibbs-Appell method. The vibrations of the links have been estimated using the assumed mode method based on Timoshenko beam theory. A specific computational algorithm has been used to precisely control the entry and exit of the collision phase. The conducted simulations demonstrate that the choice of different mode shapes significantly impacts the system's dynamic behavior. These results indicate that by optimizing the mode shapes, the dynamic performance of flexible robots can be enhanced, making them ready for more complex tasks.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، ۳۶، ۴، ۱۴۰۳. (۱۳۸-۱۱۱)

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

مدل‌سازی و شبیه‌سازی نیروهای تماسی و اصطکاکی در بازوهای رباتیکی انعطاف‌پذیر*

مقاله پژوهشی

محمد احسان یوسف‌زاده کوهبنانی[(۱)] علی محمد شافعی[(۲)]

https://doi.org/10.22067/jacsm.2024.88007.1256

چکیده در مقاله حاضر برخوردهای چندگانه برای سیستم‌های رباتیکی حلقه باز دوبعدی (صفحه‌ای) که از n لینک الاستیک با مفاصل دورانی تشکیل شده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حرکت دینامیکی این سیستم توسط الگوریتم بازگشتی گیبس-اپل و مدل‌سازی پدیده برخورد-تماس در آن به شیوه تنظیم شده صورت گرفته است. برای مدل‌سازی ارتعاشات عرضی لینک‌ها از تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. همچنین برای بالا بردن دقت مدل‌سازی، اثرات ناشی از میرایی سازه‌ای و میرایی هوا در نظر گرفته شده است. مفاصل بدون لقی و اصطکاک بوده، اما در محل برخورد لینک‌ها با زمین، نیروی اصطکاک لحاظ شده است. حرکت سیستم دارای دو مرحله پرواز و برخورد است. معادلات دیفرانسیل سیستم در مرحله برخورد در برگیرنده ترم‌های ناشی از نیروهای ویسکوالاستیک هستند که معادلات حرکت جدیدی را نتیجه می‌دهند. این معادلات دیفرانسیل جدید به دلیل ماهیت نیروی برخورد، بسیار سخت بوده و حل آنها در مدت زمان بسیار اندک برخورد تمهیدات خاصی را می‌طلبد. با توجه به زمان بسیار کوتاه برخورد، تشخیص دقیق لحظه برخورد از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. برای این منظور ورود به فاز برخورد و خروج از آن با الگوریتم محاسباتی ویژه‌ای که در این مقاله ارائه شده است، با دقت بسیار بالایی کنترل می‌شود. برای نمایش کارایی و دقت برنامه توسعه داده شده، شبیه‌سازی‌های کامپیوتری برای مطالعه رفتار دینامیکی یک سیستم رباتیکی سه‌لینکی انجام شده است. در پایان برای بررسی اثر مودشیپ‌ها بر روی تغییرشکل الاستیک لینک‌ها، از چهار دسته مودشیپ متفاوت در شبیه‌سازی‌ها استفاده شده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی شکل مود، گیبس ـ اپل، اصطکاک، ربات الاستیک، نیروهای تماسی.

مقدمه

از ربات‌ها برای انجام کارهای خطرناک، سنگین و تکراری به‌منظور دست‌یابی به دقت بالاتر و همچنین امنیت بیشتر انسان‌ها استفاده می‌شود. از این رو برای برآورده کردن نیازهای روز افزون صنایع باید ربات‌هایی سبک‌تر، دقیق‌تر، کاراتر، قدرتمندتر و با مصرف انرژی کمتر تولید شوند. از مشکلات پیش رو در شبیه‌سازی ربات‌های الاستیک می‌توان به پیچیدگی استخراج معادلات دینامیکی حرکت، ارتعاش عملگر نهایی ربات، انحرافات استاتیکی و... اشاره کرد. این عوامل می‌توانند طراحی کنترل‌کننده برای این گونه از ربات‌ها را پیچیده کنند. از طرفی طراحی ربات‌های انعطاف‌پذیر مزایای بسیار زیادی دارد. برای ربات‌های الاستیک، نسبت وزن بار قابل حمل به وزن ربات بیشتر است. همچنین کوچک‌تر شدن موتورهای محرک، مصرف کمتر انرژی، هزینه‌های کمتر مربوط به ساخت، چابک‌تر شدن سیستم و قابلیت استفاده در سازه‌های فضایی و سیستم‌های جراحی از دور، از دیگر مزیت‌های ربات‌های انعطاف‌پذیر نسبت به ربات‌های صلب است. از سوی دیگر، مطالعه پدیده برخورد-تماس به‌دلیل تعامل ربات با محیط اطراف، و یا مدل‌سازی لقی در اتصالات، از اهمیت بالایی برخوردار است. لذا با توجه به آنچه ذکر شد، هدف اصلی این تحقیق شبیه‌سازی پدیده برخورد-تماس در ربات‌هایی با لینک‌های انعطاف‌پذیر است. تلفیق این دو موضوع جزو آن دسته از موضوعات علم مکانیک است که جای بررسی و مطالعه بیشتر پیرامون آن احساس می‌شود.

به منظور دسترسی دقیق عملگر نهایی ربات به یک موقعیت

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۲/۲۰ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۳/۴/۹ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان.

(۲) نویسندهٔ مسئول، دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر،کرمان.

Email: shafei@uk.ac.ir

مشخص در فضا و جلوگیری از ارتعاشات این مجری نهایی، می‌توان بازوها را حجیم و قطور طراحی کرد. در این حالت تغییر فرم الاستیک ناچیز خواهد شد. اما این کار باعث کند شدن حرکت ربات و صرف انرژی زیادتری برای پیمایش مسیر تعیین شده می‌گردد [1]. به عنوان مثال ربات‌هایی که در فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند، باید تا حد ممکن سبک طراحی شوند تا هزینه ارسال و بهره‌برداری از آنها کمتر گردد. از این رو ملزم به استفاده از بازوهای انعطاف‌پذیر هستیم. روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی ارتعاشی لینک‌های انعطاف‌پذیر وجود دارد. به طور مثال می‌توان به روش المان محدود، و روش مودهای فرضی اشاره نمود. در این تحقیق از روش مودهای فرضی برای تعیین تغییرشکل‌های الاستیک استفاده شده است. بدین صورت که موقعیت هر نقطه از لینک به صورت ترکیب خطی شکل مودهای آن تعیین می‌گردد. ضریب شکل مود همان وزن شکل مود است که میزان تأثیر آن مود در تغییر شکل انعطاف‌پذیر آن لینک را نشان می‌دهد. با این حال، استخراج معادلات دینامیکی حرکت باید با یکی از روش‌های مرسوم مانند نیوتن- اویلر، لاگرانژ، همیلتون، گیبس- اپل و یا ... صورت گیرد.

جنیبل و همکاران با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی و با تکنیک مودهای فرضی به استخراج معادلات حرکت یک لینک انعطاف‌پذیر پرداخته، و میزان انحراف انتهای لینک در راستای محور لینک را تعیین نمودند [2]. زبین و علم معادلات حرکت یک منیپولاتور دارای دو لینک الاستیک را با روش لاگرانژ و استفاده از تکنیک المان محدود استخراج کردند [3]. برای مدل‌سازی دینامیکی یک زنجیره رباتیکی متشکل از n لینک انعطاف‌پذیر، کورایم و شافعی تحقیقات متنوعی انجام داده‌اند. ایشان با کمک روش گیبس- اپل و به‌کارگیری تکنیک مودهای فرضی به استخراج معادلات دینامیک مستقیم و معکوس این گونه از سیستم‌ها بر اساس تئوری تیر اویلر- برنولی و تئوری تیر تیموشنکو پرداخته‌اند [4]. همچنین ایشان مدل‌سازی حرکت ربات‌های الاستیک را برای ربات‌هایی که دارای مفاصل دورانی و کشویی هستند، به انجام رسانده‌اند [5]. سو و همکاران کنترل یک ربات با لینک‌ها و مفاصل انعطاف‌پذیر در حضور اصطکاک را با روش تجزیه مجازی مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق نشان داده شده که روش پیشنهادی آنها برای سیستم‌هایی با درجه آزادی بالا عملکرد بهتری نسبت به روش سنتی نیوتون–اویلر دارد [6]. ارکایا و اوزمی لقی در مفاصل را در یک مکانیزم چهار میله‌ای با لینک‌های انعطاف‌پذیر در حضور اصطکاک بررسی کرده و نشان دادند که خاصیت انعطاف‌پذیری لینک‌ها تأثیر بسیاری در ارتعاش بیرینگ‌ها دارد [7].

زمانی که یک سیستم متشکل از چندین بازوی الاستیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد، حجم عملیات ریاضی به منظور استخراج معادلات حرکت بسیار سنگین و پیچیده می‌شود. بنابراین باید به‌دنبال روشی برای استخراج خودکار این معادلات بود، به گونه‌ای که بتواند در کمترین زمان ممکن این معادلات را به صورت سیمبولیک استخراج کند. به همین دلیل از روش‌های بازگشتی به منظور استخراج معادلات استفاده می‌شود. آرمسترانگ [8] و فدرستون [9] جزو افراد پیشگامی بودند که در کارهای خود از الگوریتم‌های بازگشتی برای استخراج معادلات حرکت استفاده نمودند. چنگ و پنگ [10] برای مطالعه حرکات ضربه‌ای در سیستم‌های چند جسمی، از روش بازگشتی کین استفاده کرده‌اند. همچنین هوآنگ [11] الگوریتم بازگشتی نیوتن- اویلر، موهان و ساها [12] و بایی و هاگ [13] الگوریتم بازگشتی اویلر- لاگرانژ را برای استخراج معادلات سیستم‌های رباتیکی به کار برده‌اند. الگوریتم‌های بازگشتی بر اساس اصل کار مجازی توسط ژنگ و سونگ [14] برای منیپولاتورهای موازی و سری، و توسط یامانه و یاکاموراَ [15] برای تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت یک زنجیره باز سینماتیکی استفاده شده است.

اگر چه برای بررسی پدیده برخورد روش‌های مختلفی وجود دارد؛ اما این روش‌ها را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم‌بندی کرد. روش اول، روش غیر هموار است که در آن زمان برخورد صفر فرض شده و بر پایه قانون ضربه- اندازه حرکت بیان می‌شود. همچنین در این روش اجسام صلب و نفوذناپذیر است و سرعت اجسام در لحظه برخورد دارای ناپیوستگی است. در روش دوم تحت عنوان روش تنظیم شده زمان برخورد صفر نیست. در لحظه اندک برخورد، نیرویی تعریف می‌شود که به سیستم وارد شده و باعث تغییرات پیوسته اما سریع در سرعت اجسام خواهد شد. در این حالت اجسام صلب نبوده و هنگام برخورد در یکدیگر فرو می‌روند. تفاوت مدل‌های موجود در این روش به نحوه محاسبه نیروی برخورد در آنها برمی‌گردد. از مدل‌های اولیه می‌توان به مدل غیر خطی هرتز [16] اشاره کرد که بدون اتلاف انرژی یا فاقد دمپر است. مدل‌های پر کاربرد امروزی بر پایه مدل هانت و کراسلی [17] توسعه داده شده‌اند. این مدل‌ها با در نظر گرفتن پارامتر دمپینگ هیسترزیس، اتلاف انرژی حین برخورد را مدل

می‌کنند. پس از هانت و کراسلی محققان مختلفی برای بهبود این مدل، تلاش کرده‌اند که از مهم‌ترین آنها می‌توان به هربرت و مک‌وانل [18]، لی و ونگ [19]، لنکرانی و نیکروش [20]، فلورز و همکاران [21]، غریب و هرمزلو [22] و هوو و گوو [23] اشاره کرد.

میزان درهم فرورفتگی نسبی دو جسم معیار مهمی در محاسبه نیروی تماس در مدل‌های پیوسته است. بدین صورت که نیروی تماس را به صورت تابعی از در هم فرورفتگی نسبی و مشتق آن بیان می‌کنند. همان گونه که ذکر شد در نظر گرفتن عامل اتلاف انرژی در برخورد میان دو جسم موجب می‌شود تا مدل‌سازی دقیق‌تری از پدیده برخورد انجام شود. علاوه بر این میزان نیروی برخورد به پارامترهایی از جمله هندسه دو سطح، سختی، چسبندگی، لغزندگی، دما و... نیز بستگی دارد. آلوز و همکاران در تحقیق خود بررسی نسبتا جامعی روی انواع مدل‌های برخورد انجام داده‌اند [24]. از مطالعات اخیر انجام شده در رابطه با برخورد می‌توان به کار ژنگ و ژنگ اشاره کرد که با استفاده از روش نیوتون- اویلر برخورد ناشی از لقی در مفاصل را با استفاده از مدل تماس فلورز برای مکانیزم‌های صفحه‌ای 3-RRR و -4 RRR بررسی کرده‌اند. ایشان نشان داده‌اند که مکانیزم 4-RRR از لحاظ سینماتیکی و دینامیکی در مقایسه با حالت ایدئال (بدون لقی) نتایج بهتری نسبت به مکانیزم 3-RRR ارائه می‌دهد [25]. همچنین لی و همکاران روش نوینی مبتنی بر نمونه‌گیری، برای تولید مسیرهای عملی و قابل کنترل برای یک سیستم رباتیکی که با محیط پیرامون در تماس است، ارائه دادند. این روش شامل یک پروسه نمونه‌یابی همراه با دو مرحله بهینه‌یابی برای تولید بهترین مسیر است. ایشان شبیه‌سازی را برای یک ربات چهار درجه آزادی صفحه‌ای به انجام رسانده و نشان داده‌اند که روش ارائه شده منجر به کم شدن محاسبات کامپیوتری می‌گردد [26]. یانگ و همکاران [27] مدل دینامیکی یک مکانیزم حلقه باز با مفاصل دورانی فضایی دارای لقی را بر اساس معادلات نیوتن- اویلر و تئوری تماس هرتز استخراج کرده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهد که تأثیر مفاصل دورانی فضایی دارای لقی روی رفتار دینامیکی مکانیزم حلقه باز مورد مطالعه، قوی‌تر از انواع صفحه‌ای آن است. شافعی و شافعی مدل‌سازی دینامکی سیستم‌های رباتیکی که با محیط پیرامون خود برخورد می‌کنند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. ایشان در شبیه‌سازی برخورد از قانون برخورد نیوتن استفاده کرده و معادلات دیفرانسیل حرکت را به شیوه گیبس-اپل بازگشتی استخراج نموده‌اند [28].

زمانی که دو سطح در حال تماس، نسبت به هم دارای سرعت نسبی باشند، پدیده اصطکاک به وجود می‌آید. از جمله تأثیر اصطکاک بر سیستم شامل اتلاف انرژی، ایجاد صدا، ایجاد ارتعاش و انتشار آن در طول سیستم، و تغییر آرام یا سریع پارامترهای سیستم می‌شود؛ که با توجه به ماهیت تماس ایجاد شده، هر کدام از آنها می‌تواند اتفاق بیفتد [29]. در مجموع اصطکاک را می‌توانیم به دو مدل استاتیکی [30] و دینامیکی [31] تقسیم‌بندی کنیم. مدل‌های استاتیکی تنها حالت پایدار سیستم را توصیف می‌کنند. مدل‌های دینامیکی حالت گذرای سیستم را بهتر توصیف کرده و این کار را با در نظر گرفتن یک متغیر اضافی و در واقع با اضافه کردن یک درجه آزادی دیگر به سیستم انجام می‌دهند. اولین مدل نیروی اصطکاک، مدل اصطکاک خشک یا کولمب است [32]. محققان در سالیان اخیر برای بهبود مدل کولمب، مدل‌های متنوعی مانند مدل کولمب با استیکشن، مدل کولمب با اصطکاک لزج، مدل دارای اثر استرایبک، مدل کارناپ، مدل آمبروزیو و... را توسعه داده‌اند [33-39].

در زمینه مدل‌سازی اصطکاکی سیستم‌های چند جسمی می‌توان به تحقیقات ویتاکار [40] اشاره کرد. او برای تحلیل اثر اصطکاک بر رفتار سیستم‌های چند جسمی مدل اصطکاک کولمب را پیشنهاد کرد. باوچاو و جو [41] پدیده لغزش-چسبندگی را برای برخوردهای یک‌طرفه در اتصالات متمرکز مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. در راستای تحلیل دینامیکی زنجیره اجسام صلب، پریرا و همکاران [42] تأثیر ضریب اصطکاک و ضریب استرداد را روی رفتار سیستم مطالعه کردند. کورال و همکاران [43] در زمینه دینامیک ربات‌های راه‌رونده غیرفعال، نیروی اصطکاک ناشی از لغزش پای تکیه‌گاه را در مدل‌سازی‌های خود اعمال کرده‌اند. کیان و همکاران [44] با استفاده از روش هموار نیروی اصطکاک ایجاد شده در محل‌های برخورد را برای بازوهای انعطاف‌پذیر مدل‌سازی و شبیه‌سازی نمودند.

در این مقاله مدل‌سازی دینامیکی یک زنجیره باز رباتیکی دو بعدی دارای n لینک الاستیک در دو مرحله پرواز و برخورد به روش بازگشتی گیبس- اپل انجام می‌پذیرد. لینک‌ها در این سیستم توسط مفاصل دورانی به هم متصل شده و ارتعاشات آنها به روش مودهای فرضی بر اساس تئوری تیر تیموشنکو تخمین زده می‌شود. مدل‌سازی ریاضی پدیده برخورد- تماس که در این مقاله با استفاده از روش تنظیم شده صورت گرفته، در فاز برخورد با معادلات دیفرانسیل سیستم ادغام خواهند شد. برای به حداقل

رساندن خطا، ورود به فاز برخورد و خروج از آن با الگوریتم محاسباتی ویژه‌ای محاسبه شده و این فرایند با دقت بسیار بالایی کنترل می‌شود. در نگارش مقاله پس از مقدمه، در بخش دوم و سوم سینماتیک و دینامیک سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش چهارم مدل‌های نیروی برخورد و اصطکاک معرفی شده و سپس در فصل پنجم شکل مودهای مربوط به تئوری تیر تیموشنکو تعیین می‌شوند. به منظور مقایسه رفتار سیستم در اثر انتخاب شکل مودهای مختلف، حرکات ارتعاشی یک سیستم رباتیکی متشکل از سه لینک الاستیک در بخش ششم شبیه‌سازی شده، و در پایان در بخش نتیجه‌گیری، بر روی نتایج به دست آمده بحث و بررسی صورت می‌پذیرد.

سینماتیک سیستم

در این بخش به تشریح سینماتیک یک سیستم رباتیکی حلقه باز، متشکل از n لینک که در فضای دوبعدی حرکت می‌کند، می‌پردازیم. لینک‌های این ربات انعطاف‌پذیر بوده و مفاصل بین لینک‌ها از نوع دورانی و بدون اصطکاک و لقی فرض شده‌اند.

در ابتدا به اختصار نحوه اختصاص دستگاه‌های مختصات توضیح داده می‌شود. دستگاه مختصات مرجع لخت ${}^{ref}X_1\ {}^{ref}X_2$ در نقطه O_{ref} به زمین متصل است (شکل ۱). در این مقاله فرض بر این است که ابتدای لینک اول به زمین لولا نیست و می‌تواند آزادانه در صفحه حرکت کند. بنابراین موقعیت مکانی مبدأ دستگاه مختصات اول (O_1) با دو متغیر X_1 و X_2 نسبت به دستگاه مرجع بیان می‌شود. همچنین سرعت مطلق نقطه O_1 نسبت به دستگاه مرجع اینرسی با $\dot{X}_1$ و $\dot{X}_2$ معرفی می‌گردد. همان گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، به هر لینک دو چهارچوب اختصاص داده شده است. چهارچوب ($x_{1,i}x_{2,i}x_{3,i}$) به ابتدای هر لینک متصل است. محور $x_{1,i}$ مماس بر ابتدای لینک امتداد یافته است. از طرفی محور $x_{2,i}$ زاویه پادساعتگرد 90 درجه با محور $x_{1,i}$ می‌سازد. بدیهی است در این حالت محور $x_{3,i}$ (محور دوران لینک) عمود بر صفحه کاغذ به سمت خارج است. جهت‌گیری چهارچوب اختصاص داده شده به انتهای لینک ($\hat{x}_{1,i}\hat{x}_{2,i}\hat{x}_{3,i}$) بدین صورت است که محور $\hat{x}_{1,i}$ مماس بر انتهای لینک، محور $\hat{x}_{3,i}$ موازی با محور $x_{3,i}$ و محور $\hat{x}_{2,i}$ به گونه‌ای است که دستگاه مختصات راستگرد ایجاد شود. چنانچه لینک هیچ گونه تغییرشکل الاستیکی نداشته باشد، این دو چهارچوب دارای جهت‌گیری یکسان خواهند شد. تعداد درجات آزادی سیستم مذکور $DOF = n + \sum_{i=1}^{n} m_i + 2$ است، که n بیانگر تعداد q_jها (زاویه هر لینک نسبت به لینک قبلی؛ یعنی زاویه میان محورهای $\hat{x}_{1,i-1}$ و $x_{1,i}$) و m_i بیانگر تعداد j مودشیپی است که برای مدل‌سازی تغییرشکل الاستیک لینک iام به کار رفته است (δ_{ij}). همچنین دو درجه آزادی X_j به دلیل لولا نبودن لینک اول و حرکت آزادانه آن در صفحه ایجاد شده است. بنابراین لینک اول دارای $m_1 + 3$ سه درجه آزادی (دو درجه آزادی انتقالی، یک درجه آزادی دورانی و m_1 درجه آزادی مربوط به تغییرشکل الاستیک لینک اول) و دیگر لینک‌ها $m_i + 1$ درجه آزادی (یک درجه آزادی دورانی و m_i درجه آزادی مربوط به تغییرشکل الاستیک لینک iام) دارند.

با توجه به شکل (۱) موقعیت المان دیفرانسیلی Q در چهارچوب متحرک متصل به ابتدای لینک iام از جمع دو عبارت (موقعیت صلب المان و جابه‌جایی ناشی از تغییرشکل الاستیک) به دست می‌آید، لذا داریم:

$${}^{i}\mathbf{r}_{Q/O_i} = \eta_i\,{}^{i}\mathbf{X}_{i,1} + \{w_{1,i}\quad w_{2,i}\quad w_{3,i}\}^T \qquad (۱)$$

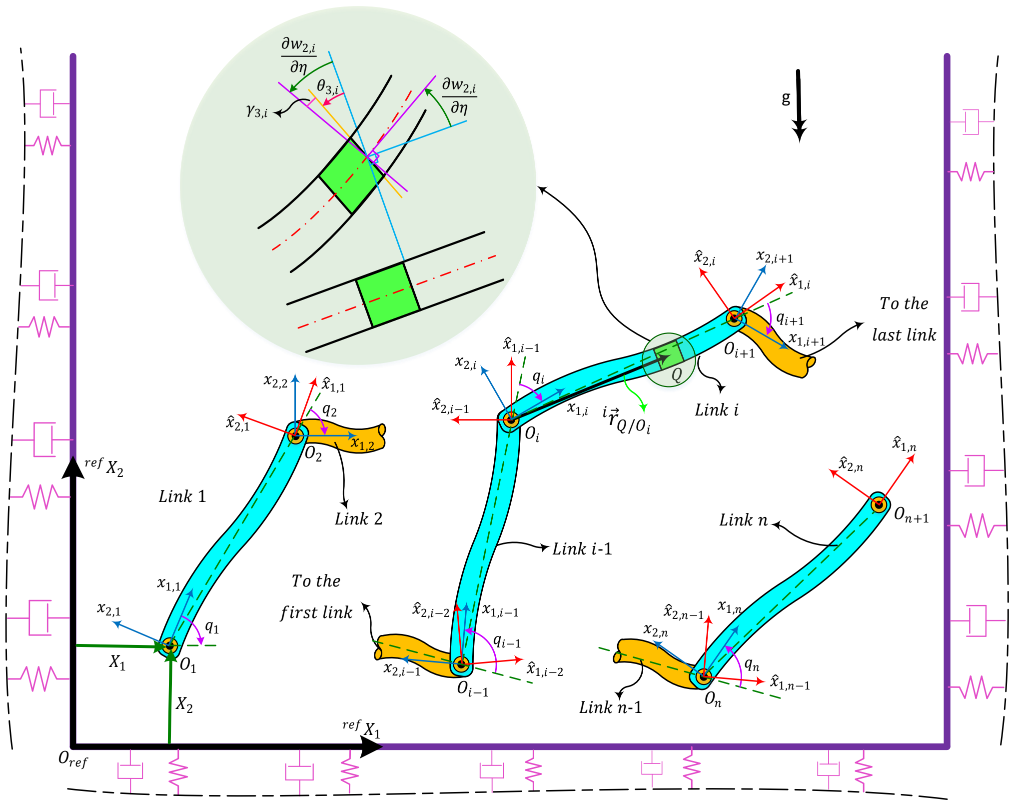
که در آن ${}^{i}\mathbf{X}_{i,1} = \{1\ 0\ 0\}^T$ و η بیانگر فاصله المان دیفرانسیلی Q تا مبدأ O_i برای حالتی است که لینک هیچ گونه تغییر فرمی نداشته باشد. $w_{1,i}$، $w_{2,i}$ و $w_{3,i}$ به ترتیب جابجایی‌های ناشی از تغییرشکل الاستیک در جهت‌های $x_{1,i}$، $x_{2,i}$ و $x_{3,i}$ بوده که از ترکیب خطی شکل مودها به دست می‌آیند.

$$\{w_{1,i}\quad w_{2,i}\quad w_{3,i}\}^T = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}(t)\mathbf{W}_{ij}(\eta) \qquad (۲)$$

$\mathbf{W}_{ij} = \{W_{1,ij}\quad W_{2,ij}\quad W_{3,ij}\}^T$ بردار تابع ویژه‌ای است که مؤلفه‌های آن شکل مودهای محوری ($W_{1,ij}$) و خمشی ($W_{2,ij}$ و $W_{3,ij}$) تیرهای الاستیک هستند. همان گونه که پیشتر نیز گفته شد، m_i تعداد شکل مودهایی است که با آن تغییرشکل الاستیک لینک iام تخمین زده می‌شود. همچنین $\delta_{ij}(t)$ وزن متغیر با زمان شکل مود jام از لینک iام است. لازم به‌ذکر است در این مقاله فقط ارتعاشات لینک در جهت $x_{2,i}$ در نظر گرفته شده است. بنابراین $W_{1,ij}$ و $W_{3,ij}$ صفر هستند.

در این مقاله از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی تغییرشکل الاستیک لینک‌ها استفاده می‌شود. با توجه به تغییرشکل نشان داده شده برای المان Q در شکل (۱)، زاویه میان خط مماس بر لینک تغییر فرم یافته با امتداد صلب آن، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial w_{2,i}}{\partial \eta} = \Theta_{3,i} + \gamma_{3,i} \qquad (۳)$$



شکل ۱ زنجیره‌ای از لینک‌های انعطاف‌پذیر در حال سقوط آزاد

که در آن $\gamma_{3,i}$ شیب ناشی از اثرات برشی و $\Theta_{3,i}$ شیب ناشی از اثرات خمشی است. در اینجا لازم به ذکر است که به دلیل حرکت صفحه‌ای از تغییر فرم زاویه‌ای در راستاهای $x_{1,i}$ و $x_{2,i}$ صرف نظر شده است ($\Theta_{1,i} = \Theta_{2,i} = 0$). اما $\Theta_{3,i}$ با استفاده از روش مودهای فرضی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$ {}^{i}\boldsymbol{\theta}_{i} = \{0 \quad 0 \quad \Theta_{3,i}\}^{T} = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}(t)\boldsymbol{\Theta}_{ij}(\eta) \qquad (۴) $$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\Theta}_{ij} = \{0 \quad 0 \quad \Theta_{3,ij}\}^{T}$. همچنین مؤلفه های این بردار از شکل مودهای دورانی مربوط به تیر تیمو شنکو تشکیل شده است. اکنون با استفاده از معادلات (۲) تا (۴) می‌توان شکل مودهای کرنش برشی را به صورت زیر به دست آورد.

$$ \Gamma_{3,ij} = \frac{\partial W_{2,ij}}{\partial \eta} - \Theta_{3,ij} \qquad (۵) $$

در ادامه با استفاده از روش گیبس- اپل به استخراج معادلات حرکت سیستم مورد مطالعه می‌پردازیم. به این منظور به شتاب مطلق المان Q نیاز داریم که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$ {}^{i}\ddot{\mathbf{r}}_{Q} = {}^{i}\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^{i}\ddot{\mathbf{r}}_{Q/O_i} + 2\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\dot{\mathbf{r}}_{Q/O_i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \times {}^{i}\mathbf{r}_{Q/O_i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times ({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\mathbf{r}_{Q/O_i}) \qquad (۶) $$

که در آن ${}^{i}\ddot{\mathbf{r}}_{O_i}$ شتاب مطلق مفصل iام و ${}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}$ سرعت زاویه‌ای لینک iام است. همچنین، ${}^{i}\dot{\mathbf{r}}_{Q/O_i}$ و ${}^{i}\ddot{\mathbf{r}}_{Q/O_i}$ را می‌توان با یک و دو بار مشتق‌گیری از رابطه (۱) به دست آورد.

دینامیک سیستم

استخراج معادلات حرکت

حرکت سیستم رباتیکی مورد مطالعه در این مقاله را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول که ربات در وضعیت معلق در هوا حرکت می‌کند و در بخش دیگر حرکت، ربات حداقل در محل یکی از گره‌ها با زمین برخورد می‌کند. در استخراج معادلات دیفرانسیل سیستم از روش گیبس- اپل بازگشتی پایه‌ریزی شده برای ربات‌های الاستیک استفاده شده است. در این شیوه انرژی شتاب گیبس، انرژی پتانسیل الاستیک سیستم، و انرژی تلف شده ناشی از میرایی سازه‌ای و میرایی هوا برای تمامی لینک‌ها محاسبه می‌شود. اثر انرژی پتانسیل گرانشی با در نظر گرفتن شتاب 1g برای مبدأ دستگاه مرجع لخت (O_{ref}) در جهت مثبت محور ${}^{ref}X_2$ وارد معادلات سیستم خواهد شد.

با انتگرال‌گیری از انرژی شتاب المان Q بر روی لینک نمونه iام و جمع بستن برای تمام لینک‌ها، تابع گیبس کل سیستم مطابق رابطه (۷) به دست می‌آید.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\Big[\frac{1}{2}\mu_i(\eta_i)\big({}^i\ddot{\mathbf{r}}_Q^T.{}^i\ddot{\mathbf{r}}_Q\big)+\frac{1}{2}{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T.J_i(\eta_i)\,{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T.{}^i\widetilde{\omega}_iJ_i(\eta_i)\,{}^i\boldsymbol{\omega}_i\Big]d\eta_i \quad (۷)$$

که در آن ${}^i\widetilde{\omega}_i$ ماتریس پادمتقارن متناظر با بردار ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ است. انرژی پتانسیل الاستیک سیستم از رابطه زیر تعیین خواهد شد:

$$V_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ij}(t)\delta_{ik}(t)K_{ijk} \quad (۸)$$

که در آن:

$$K_{ijk}=\int_0^{l_i}[kA_iG_i\Gamma_{2,ij}\Gamma_{2,ik}+kA_iG_i\Gamma_{3,ij}\Gamma_{3,ik}+ G_iI_{x_1i}\frac{\partial\Theta_{1,ij}}{\partial\eta}\frac{\partial\Theta_{1,ik}}{\partial\eta}+E_iI_{x_2i}\frac{\partial\Theta_{2,ij}}{\partial\eta}\frac{\partial\Theta_{2,ik}}{\partial\eta}+ E_iI_{x_3i}\frac{\partial\Theta_{3,ij}}{\partial\eta}\frac{\partial\Theta_{3,ik}}{\partial\eta}+E_iA_i\frac{\partial W_{1,ij}}{\partial\eta}\frac{\partial W_{1,ik}}{\partial\eta}]d\eta \quad (۹)$$

با توجه به آنکه در این مقاله تنها حرکت صفحه‌ای سیستم در نظر گرفته شده است، لذا در معادله فوق فقط جملات دوم و پنجم در تشکیل انرژی پتانسیل کرنشی ایفای نقش می‌کنند. در معادله بالا k ضریب برش تیموشنکو بوده که برای مقاطع عرضی مستطیل شکل مقدار آن 5/6 است.

در رابطه (۱۰) انرژی تلف شده ناشی از میرایی سازه‌ای و میرایی هوا در قالب تابع استهلاک ریلی ارائه شده است.

$$D=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}(t)\dot{\delta}_{ik}(t)D_{ijk} \quad (۱۰)$$

که در آن:

$$D_{ijk}=\int_0^{l_i}[\gamma W_{2,ij}W_{2,ik}+\gamma W_{3,ij}W_{3,ik}+ K_{vi}I_{x_3i}\frac{\partial^2W_{2,ij}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2W_{2,ik}}{\partial\eta^2}+ K_{vi}I_{x_2i}\frac{\partial^2W_{3,ij}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2W_{3,ik}}{\partial\eta^2}]d\eta \quad (۱۱)$$

مجددا به‌دلیل فرض حرکت صفحه‌ای، تنها جملات اول و سوم در تشکیل تابع استهلاک ریلی ایفای نقش می‌کنند. همچنین در این معادله γ و K_{vi} به ترتیب ضریب میرایی هوا و ضریب میرایی کلوین- ویت هستند.

اکنون می‌توان معادلات دیفرانسیلی دینامیک معکوس سیستم را به روش گیبس-اپل طبق رابطه زیر به‌دست آورد.

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{z}_j}+\frac{\partial D}{\partial\dot{z}_j}+\frac{\partial V_e}{\partial z_j}=U_j \qquad j=1,2,\dots,(n+\sum_{i=1}^{n}m_i+2) \quad (۱۲)$$

که در آن U_j ها نیروهای تعمیم‌یافته ناشی از نیروهای خارجی، به‌جز نیروی گرانش زمین، اثرات ناشی از انرژی پتانسیل کرنشی، میرایی هوا، و میرایی سازه‌ای هستند. همچنین z_j ها مؤلفه‌های بردار مختصات تعمیم‌یافته هستند که به‌فرم زیر ارائه می‌شوند.

$$\mathbf{Z}=[q_1\quad\delta_{11}\quad\cdots\quad\delta_{1m_1}\quad q_2\quad\delta_{21}\quad\cdots\quad\delta_{2m_2}\quad\cdots\quad q_n\quad\delta_{n1}\quad\cdots\quad\delta_{nm_n}\quad X_1\quad X_2]^T \quad (۱۳)$$

مرحله پرواز

همان گونه که قبلا اشاره شد، سیستم رباتیکی مورد بررسی دارای دو مرحله پرواز و برخورد است. از آنجایی که سیستم مذکور حرکت خود را از مرحله پرواز شروع می‌کند، ابتدا به استخراج معادلات در این مرحله می‌پردازیم. در مرحله پرواز، به غیر از نیروی جاذبه زمین، اثرات مربوط به انرژی پتانسیل کرنشی و عوامل مستهلک کننده انرژی (شامل میرایی هوا و میرایی سازه‌ای) که در سمت چپ معادله (۱۲) وارد شده‌اند، نیروی خارجی دیگری به سیستم وارد نمی‌شود. بنابراین سمت راست معادله (۱۲) در این حالت صفر خواهد شد.

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{z}_j}+\frac{\partial D}{\partial\dot{z}_j}+\frac{\partial V_e}{\partial z_j}=0 \qquad j=1,2,\dots,(n+\sum_{i=1}^{n}m_i+2) \quad (۱۴)$$

معادله بالا فرم دینامیک معکوس معادلات سیستم مورد مطالعه است. چنانچه جملاتی که شامل $\ddot{Z}$ هستند را به سمت چپ و دیگر جملات را به سمت راست تساوی منتقل کرده و آنها به فرم ماتریسی باز نویسی کنیم، فرم دینامیک مستقیم معادلات دیفرانسیل سیستم به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\boldsymbol{I}(Z)\ddot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{R}(Z,\dot{Z}) \quad (۱۵)$$

در معادلات بالا $\mathbf{I}(Z)$ ماتریس اینرسی کل سیستم است. همچنین $\mathbf{R}(Z,\dot{Z})$ بردار جملات دینامیکی باقی‌مانده ا ست که به شکل زیر ارائه می‌گردد.

$$\mathbf{R}(Z,\dot{Z}) = \left[R_{q_1} \quad R_{\delta_{11}} \quad \cdots \quad R_{\delta_{1m_1}} \quad R_{q_2} \quad R_{\delta_{21}} \quad \cdots \quad R_{\delta_{2m_2}} \quad \cdots \quad R_{q_n} \quad R_{\delta_{n1}} \quad \cdots \quad R_{\delta_{nm_n}} \quad R_{X_1} \quad R_{X_2}\right]^T \tag{۱۶}$$

جزئیات بیشتر در مورد نحوه استخراج درایه‌های ماتریس اینرسی و بردار جملات دینامیکی باقی مانده با استفاده از الگوریتم بازگشتی گیبس-اپل در مرجع [5] ارائه شده است.

مرحله برخورد

در مرحله برخورد فرض بر این است که سیستم رباتیکی مورد مطالعه فقط در ابتدا و انتهای لینک‌ها با زمین برخورد می‌کند. نیروهای خارجی که در این وضعیت به سیستم وارد می‌شوند، نیروهای عمودی حاصل از برخورد و نیروهای اصطکاک ناشی از تماس لینک‌ها با زمین هستند. لذا در این مرحله، نیروهای تعمیم‌یافته حاصل از این دو نیرو، جایگزین U_j ها در معادله (۱۲) خواهند شد.

$$\boldsymbol{U} = \sum_k \boldsymbol{J}_k^T(Z) \cdot \left(\boldsymbol{F}_{N,k}(\Delta_{N,k}, \dot{\Delta}_{N,k}) + \boldsymbol{F}_{T,k}(\boldsymbol{F}_{N,k}, \boldsymbol{V}_{T,k})\right) \tag{۱۷}$$

که در آن k شماره مفصلی است که با زمین برخورد کرده است. همچنین $\mathbf{F}_{N,k}$ بردار نیروی عمودی حاصل از برخورد، $F_{T,k}$ بردار نیروی مماس بر سطح ناشی از اصطکاک، $\Delta_{N,k}$ میزان فرورفتگی نسبی مفصل kام در سطح در راستای عمود بر آن، $\dot{\Delta}_{N,k}$ سرعت نفوذ این مفصل در سطح مذکور در امتداد عمود بر آن، و $\mathbf{V}_{T,k}$ بردار سرعت مفصل kام در جهت مماس بر سطح تماس است. همچنین $\mathbf{J}_k(Z)$ ماتریس ژاکوبین مفصل برخورد کننده به زمین است. اگر $^{ref}\mathbf{r}_{O_k} = \left[^{ref}x_{1,O_k} \quad ^{ref}x_{2,O_k}\right]^T$ بیان مختصات مفصل O_k در دستگاه مرجع باشد، آن گاه این ماتریس به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{J}_k(Z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial q_1} & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial \delta_{11}} & \cdots & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial q_n} & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial \delta_{1n}} & \cdots & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial \delta_{nm_n}} & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial X_1} & \frac{\partial(^{ref}x_{1,O_k})}{\partial X_2} \\ \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial q_1} & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial \delta_{11}} & \cdots & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial q_n} & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial \delta_{1n}} & \cdots & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial \delta_{nm_n}} & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial X_1} & \frac{\partial(^{ref}x_{2,O_k})}{\partial X_2} \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

برای به‌دست آوردن فرم دینامیک مستقیم معادلات سیستم در مرحله برخورد کافی است در معادله (۱۵) بردار جملات باقی‌مانده دینامیکی با بردار نیروهای تعمیم‌یافته جمع شود.

$$\mathbf{I}(Z)\ddot{\mathbf{Z}} = \mathbf{R}(Z,\dot{Z}) + \sum_k \boldsymbol{J}_k^T(Z) \cdot \left(\boldsymbol{F}_{N,k}(\Delta_{N,k}, \dot{\Delta}_{N,k}) + \boldsymbol{F}_{T,k}(\boldsymbol{F}_{N,k}, \boldsymbol{V}_{T,k})\right) \tag{۱۹}$$

معرفی مدل‌های نیرو تماس و اصطکاک

چنانچه قبلا گفته شد، دو شیوه معروف در تحلیل دینامیکی پدیده برخورد روش تنظیم شده و روش ناهموار هستند [45,46]. شیوه تنظیم شده کارایی بهتری در مدل‌سازی پدیده برخورد- تماس داشته و از طریق آن می‌توان نیروی عمودی تماس و سایر پارامترهای حرکت را به صورت تابعی پیوسته از زمان به‌دست آورد. لذا در این مقاله از این روش در مدل‌سازی پدیده برخورد استفاده شده است. اما به رغم سهولت این روش در استخراج معادلات دیفرانسیل سیستم، حل عددی این معادلات به دلیل تغییرات بسیار شدید متغیرها در بازه زمانی بسیار کوتاه برخورد، دشوار است و نیازمند تمهیدات خاصی است [47,48].

بر خلاف مدل‌های اولیه که تنها فنریت محل برخورد را در نظر می‌گیرند (مدل هوک و هرتز)، مدل‌های نیروی تماسی که امروزه استفاده می‌شوند (و سر منشأ آنها به کارهای هانت- کراسلی بر می‌گردد) از دو ترم الاستیک و میراکننده تشکیل شده‌اند. این طریقه مدل‌سازی که به واقعیت نیز نزدیک‌تر است به‌صورت زیر ارائه می‌گردند [49,50]:

$$F_N = K\Delta^n + \chi\Delta^m\dot{\Delta} \tag{۲۰}$$

در این رابطه K سختی تعمیم‌یافته است که به فرم سطوح تماس و جنس آنها بستگی دارد. n و m معمولا با هم برابر و

مقدار آنها 3/2 بوده و χ فاکتور میرایی هیسترزیس است. ترم $K\Delta^n$ قسمت الاستیک نیرو و ترم $\chi\Delta^m\dot{\Delta}$ بخش میراکننده آن است. ترم میراکننده، اتلاف انرژی حین برخورد را مدل می‌کند. انرژی تلف شده طی برخورد به صوت، گرما، امواج ارتعاشی و... تبدیل می‌شود [51,52].

تفاوت عمده مدل‌های نیروی تماس در نحوه بیان فاکتور میرایی هیسترزیس در آنها است. این فاکتور به سختی تعمیم‌یافته، ضریب استرداد و سرعت اولیه برخورد ارتباط دارد. محققان بسیاری در دهه‌های اخیر با استفاده از روش‌های تجربی یا تحلیلی، رابطه‌های متفاوتی برای این فاکتور ارائه کرده‌اند. در ادامه سه مورد از این رابطه‌ها معرفی می‌گردد.

هانت و کراسلی (۱۹۷۵)

$$F_N = K\Delta^n\left[1+\frac{3(1-c_r)}{2}\frac{\dot{\Delta}}{\dot{\Delta}^{(-)}}\right],$$

$$(m=n \quad \& \quad \chi=\frac{3(1-c_r)}{2}\frac{K}{\dot{\Delta}^{(-)}}) \tag{۲۱}$$

فلورز و همکاران (۲۰۱۱)

$$F_N = K\Delta^n\left[1+\frac{8(1-c_r)}{5c_r}\frac{\dot{\Delta}}{\dot{\Delta}^{(-)}}\right],$$

$$(m=n \quad \& \quad \chi=\frac{8(1-c_r)}{5c_r}\frac{K}{\dot{\Delta}^{(-)}}) \tag{۲۲}$$

هوو و گوو (۲۰۱۵)

$$F_N = K\Delta^n\left[1+\frac{3(1-c_r)}{2c_r}\frac{\dot{\Delta}}{\dot{\Delta}^{(-)}}\right],$$

$$(m=n \quad \& \quad \chi=\frac{3(1-c_r)}{2c_r}\frac{K}{\dot{\Delta}^{(-)}}) \tag{۲۳}$$

که c_r ضریب استرداد و $\dot{\Delta}^{(-)}$ سرعت نفوذ در لحظه برخورد است.

به‌منظور ارزیابی میزان دقت مدل‌های نیروی تماس، کارهای تحقیقاتی بسیاری به چاپ رسیده است، که در آنها برخورد دو گوی با مدل‌های مختلف برخورد شبیه‌سازی شده است. نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که اکثر مدل‌ها در بازه $0.7 \le c_r \le 1$ جواب‌های قابل قبولی ارائه می‌کنند [53]. در همین راستا، نتایج انواع مدل‌های نیروی تماس برای یک زنجیره رباتیکی متشکل از ۴ لینک که با محیط پیرامون خود برخورد می‌کند، توسط احمدی‌زاده و همکاران ارائه گردید [54]. طبق این تحقیق برای ضریب استرداد $c_r = 0.8$، مدل معرفی شده در معادله (۲۳) نتیجه بهتری نسبت به سایر مدل‌ها نشان می‌دهد. از آنجایی که در این مقاله قصد داریم با ضریب استرداد $c_r = 0.8$ به شبیه‌سازی بپردازیم، لذا مدل هوو و گوو را برای مدل‌سازی نیروی برخورد برمی‌گزینیم.

نیروی اصطکاک بین دو سطح که نسبت به هم حرکت دارند ایجاد شده و در خلاف جهت سرعت نسبی عمل می‌کند. برای محاسبه نیروی اصطکاک مدل‌های فراوانی موجود است. به‌منظور تعیین دقیق‌تر رفتار دینامیکی سیستم، انتخاب مدل مناسب بسیار اهمیت دارد. اولین، ساده‌ترین و پرکاربردترین مدل نیروی اصطکاک مدل اصطکاک کولمب یا خشک است. در این مدل، نیروی اصطکاک رابطه مستقیمی با نیروی عمودی اعمال شده بین دو سطح دارد. با این حال، مدل کولمب توانایی توضیح بسیاری از پدیده‌های اصطکاکی مانند استیکشن، اثر استرایبک، پیش لغزش و ... را ندارد. همچنین مقدار این نیرو در سرعت صفر دارای ناپیوستگی است. محققان برای رفع مشکلات این مدل، راهکارهای فراوانی را پیشنهاد داده‌اند که مطالعات آنها منجر به معرفی مدل‌های استاتیکی و دینامیکی اصطکاک شده است. در مدل اصطکاک دینامیکی با معرفی یک متغیر اضافی، مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های اصطکاکی امکان‌پذیر می‌گردد. این مدل از اصطکاک بیشتر برای توصیف حالت گذرای سیستم مناسب بوده، و در حالت پایدار همانند مدل‌های نیروی اصطکاک استاتیکی عمل می‌کند. با توجه به اینکه در مسئله مورد مطالعه در این تحقیق، سرعت نسبی در هنگام تماس حالت نوسانی ندارد، استفاده از مدل‌های اصطکاک استاتیکی مناسب‌تر است.

از سایر مدل‌های نیروی اصطکاک استاتیکی می‌توان به مدل کولمب با استیکشن، مدل کولمب با اصطکاک ویسکوز، مدل دارای اثر استرایبک، مدل کارناپ، مدل بنگیسو و آکای، مدل آمبرزیو و... اشاره کرد [55]. در جدول (۱) نمودار نیروی اصطکاک- سرعت نسبی برای برخی از این مدل‌ها ارائه شده است.

در حالت کلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ربات‌های الاستیک از پیچیدگی‌های خاصی برخوردار بوده که برخورد این گونه از ربات‌ها با محیط اطراف، بر پیچیدگی این معادلات می‌افزاید. این حالت منجر به سخت‌شدگی معادلات سیستم شده، که در این صورت بروز خطاهای عددی هنگام حل معادلات دیفرانسیل سیستم، دور از انتظار نیست. به عنوان نمونه می‌دانیم هنگامی‌که مفصلی به‌صورت عمودی به یک سطح برخورد می‌کند، سرعت آن مفصل در راستای مماس بر سطح صفر باقی می‌ماند. اما در شبیه‌سازی سیستم‌های پیچیده به‌دلیل خطاهای عددی مقدار این سرعت صفر نخواهد شد. اگرچه اندازه این خطاها بسیار اندک هستند، اما در اکثر مدل‌های نیروی اصطکاک، نیرویی تقریبا معادل $\mu_k F_N$ ایجاد می‌شود. مقدار این نیرو به‌دلیل بزرگ بودن نیروی عمودی برخورد، قابل ملاحظه بوده و اعمال آن بر سیستم، خطایی را ایجاد می‌کند که غیر قابل چشم‌پوشی است. لذا برخی از مدل‌های نیروی اصطکاک مانند مدل آمبروزیو به گونه‌ای طرح‌ریزی شده‌اند که برای سرعت‌هایی کمتر از یک مقدار مشخص (در مدل آمبروزیو $v_0 = 0.0001 m/s$) نیروی اصطکاک صفر لحاظ شود. این موضوع باعث حذف خودکار این نمونه از خطاهای عددی می‌گردد. بنابراین در این تحقیق برای مدل‌سازی نیروی اصطکاک حین برخورد مفاصل با محیط اطراف، از مدل آمبروزیو استفاده شده است. این مدل به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\mathbf{F_T} = \begin{cases} \mu_k F_N \operatorname{sgn}(\mathbf{V_T}) & \text{if } \|\mathbf{V_T}\| \geq v_1 \\ \dfrac{\|\mathbf{V_T}\| - v_0}{v_1 - v_0} \mu_k F_N \operatorname{sgn}(V_T) & \text{if } v_0 < \|\mathbf{V_T}\| < v_1 \\ \mathbf{0} & \text{if } \|\mathbf{V_T}\| \leq v_0 \end{cases} \tag{۲۴}$$

که در آن μ_k ضریب اصطکاک جنبشی، F_N نیروی عمودی سطح و $\mathbf{V_T}$ سرعت مماسی است.

تعیین مودشیپ‌های تیر تیموشنکو

در این تحقیق علاوه بر تحلیل پدیده برخورد–تماس به شیوه مدل نیروی تماسی در ربات‌های الاستیک، تأثیر شکل مودهای مختلف در پاسخ این‌گونه از سیستم‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. همانگونه که پیشتر گفته شد برای مدل‌سازی رفتار الاستیک بازوهای ربات، مدل تیر تیموشنکو در نظر گرفته شده است. معادلات استخراج شده در این مدل شامل دو دسته معادله دیفرانسیل کوپله بر حسب جابجایی عرضی w، شیب ناشی از گشتاورهای خمشی و مشتقات جزیی آنها نسبت به زمان و مکان است. با تفکیک کردن این دو معادله، به معادلات غیر کوپله (۲۵) و (۲۶) می‌رسیم.

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{\rho^2 I}{k^2 G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(\rho I + \frac{\rho EI}{k^2 G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^2 \partial t^2} = 0 \tag{۲۵}$$

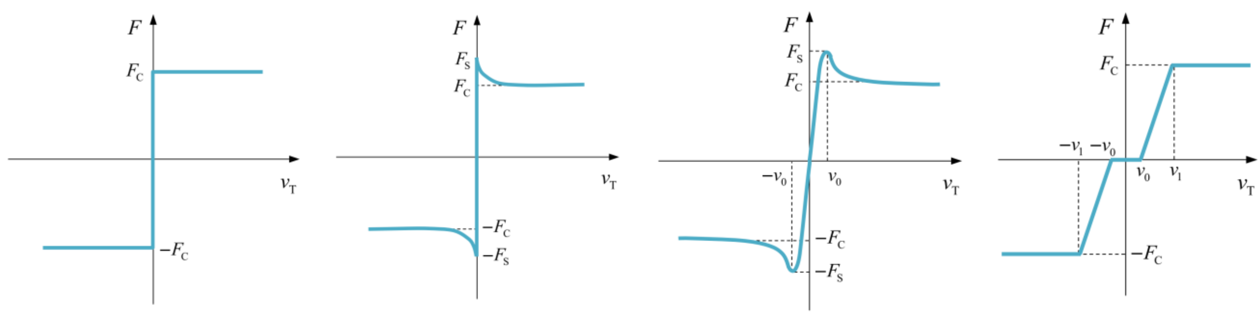
$$EI\frac{\partial^4 \theta}{\partial \eta^4} + \frac{\rho^2 I}{k^2 G}\frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} + \rho A\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \left(\rho I + \frac{\rho EI}{k^2 G}\right)\frac{\partial^4 \theta}{\partial \eta^2 \partial t^2} = 0 \tag{۲۶}$$

با فرض حل سنکرون به‌صورت زیر

$$w(\eta, t) = W(\eta)e^{j\omega t} \qquad \text{and} \qquad \theta(\eta, t) = \Theta(\eta)e^{j\omega t} \tag{۲۷}$$

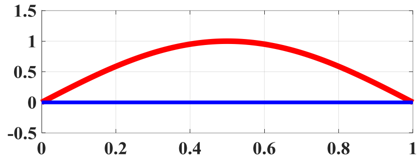
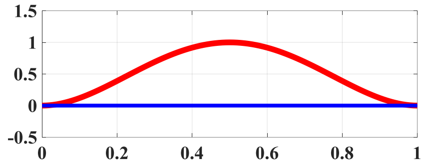
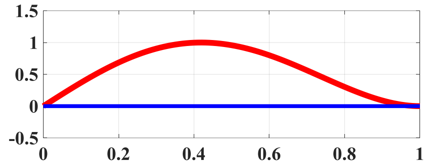
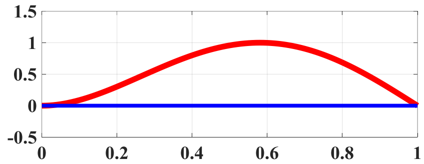
و قرار دادن آنها در معادلات (۲۵) و (۲۶) نتایج زیر حاصل می‌شود.

جدول ۱ نمودار نیروی اصطکاک- سرعت نسبی برای برخی از مدل‌های نیروی اصطکاک استاتیکی



مدل اصطکاک آمبرزیو | مدل بنگیسو و آکای | مدل با اثر استرایبک | اصطکاک کولمب

جدول ۲ شکل مودهای استفاده شده در این مقاله

نوع	تابع مود	شکل مود
ss	$W_{ss} = \sin(3.141592653589793\eta)$ $\Theta_{ss} = 3.140333690109594 \times \cos(3.141592653589793\eta)$	
cc	$W_{cc} = 0.6292076184824934 \times \cosh(4.72606095063675\eta)$ $- 0.6292076184824934 \times \cos(4.728894916196515\eta)$ $- 0.6181543604098716 \times \sinh(4.72606095063675\eta)$ $+ 0.6189067368941716 \times \sin(4.728894916196515\eta)$ $\Theta_{cc} = 2.924089234018893 \times \cos(4.728894916196515\eta)$ $- 2.924089234018893 \times \cosh(4.72606095063675\eta)$ $+ 2.97637506260959 5 \times \sinh(4.72606095063675\eta)$ $+ 2.97275682019588 \times \sin(4.728894916196515\eta)$	
sc	$W_{sc} = 0.02617115567137916 \times \sinh(3.924559038288969\eta)$ $+ 0.937356072626805 \times \sin(3.926181400745614\eta)$ $\Theta_{sc} = 0.1027745658114473 \times \cosh(3.924559038288969\eta)$ $+ 3.677927210568842 \times \cos(3.926181400745614\eta)$	
cs	$W_{cs} = 0.6622741284223433 \times \cosh(3.924559038288969\eta)$ $- 0.6622741284223433 \times \cos(3.926181400745614\eta)$ $- 0.6627910308436212 \times \sinh(3.924559038288969\eta)$ $+ 0.6633471080156852 \times \sin(3.926181400745614\eta)$ $\Theta_{cs} = 2.602791457664548 \times \cos(3.926181400745614\eta)$ $- 2.602791457664547 \times \cosh(3.924559038288969\eta)$ $+ 2.600761573215394 \times \sinh(3.924559038288969\eta)$ $+ 2.598581381090682 \times \sin(3.926181400745614\eta)$	

$$W(\eta) = C_1 \sin(\alpha\omega\eta) + C_2 \cos(\alpha\omega\eta) + C_3 \sinh(\beta\omega\eta) + C_4 \cosh(\beta\omega\eta)$$

(۲۸)

$$\Theta(\eta) = aC_1 \cos(\alpha\omega\eta) - aC_2 \sin(\alpha\omega\eta) + bC_3 \cosh(\beta\omega\eta) + bC_4 \sinh(\beta\omega\eta)$$

(۲۹)

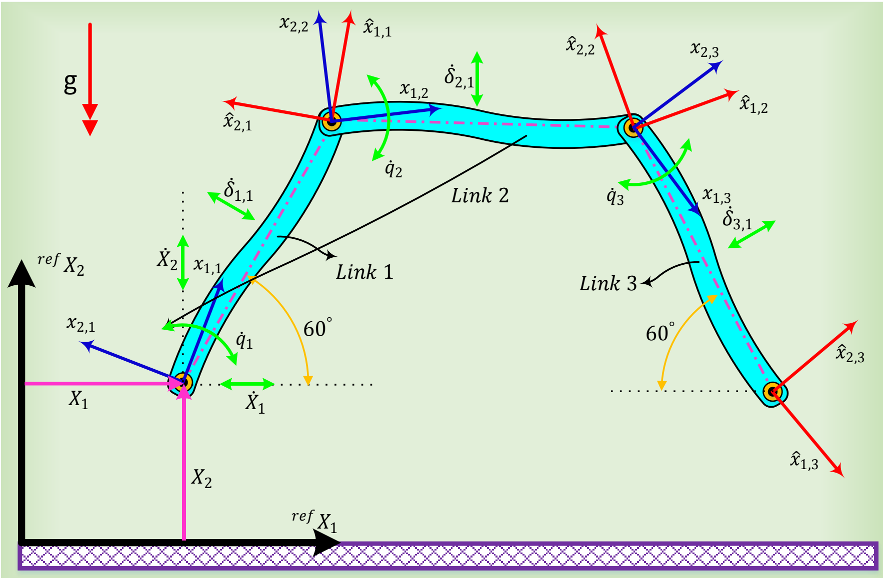
در معادلات بالا α و β با توجه به پارامترهای سیستم به دست آمده و a و b نیز تابعی از ω هستند. از طرفی مقادیر ω و C_1 تا C_4 با استفاده از چهار شرط مرزی به دست می‌آیند [56].

در این مقاله بر اساس چهار دسته از شرایط مرزی، اولین شکل مود مربوط به جابه‌جایی عرضی و شیب ناشی از گشتاور خمشی به دست آمده است. این شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده- تکیه‌گاه ساده، تکیه‌گاه گیردار- تکیه‌گاه گیردار، تکیه‌گاه ساده- تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه گیردار- تکیه‌گاه ساده هستند. در جدول (۲) رابطه و شکل مودهای مربوط به جابه‌جایی عرضی آورده شده است.

شبیه‌سازی کامپیوتری

در این بخش به شبیه‌سازی یک زنجیره رباتیکی با لینک‌های الاستیک که دارای مفاصل دورانی هستند، خواهیم پرداخت. هدف از این شبیه‌سازی بررسی کارایی و صحت عملکرد مدل دینامیکی ارائه شده برای تحلیل پدیده برخورد- تماس در ربات‌های الاستیک است. برای این منظور یک زنجیره رباتیکی شامل سه لینک الاستیک مطابق شکل (۲) از ارتفاع ۰٫۹ متری رها می‌شود. ربات یاد شده با زمین برخورد کرده و پس از سپری شدن زمان بسیار کوتاه برخورد دوباره به هوا باز می‌گردد. فرض بر این است که زنجیره رباتیکی فقط در محل ابتدا یا انتهای لینک‌ها با زمین برخورد می‌کند.

برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت، الگوریتمی بر پایه روش رانگ- کوتا- فهلبرگ (RK45) توسعه داده شده است. استفاده از این الگوریتم این امکان را فراهم می‌کند تا در مدت زمان برخورد، متناسب با دقت مورد نظر، بازه زمانی به صورت خودکار برای ایجاد کمترین میزان خطای عددی، تعیین شود.



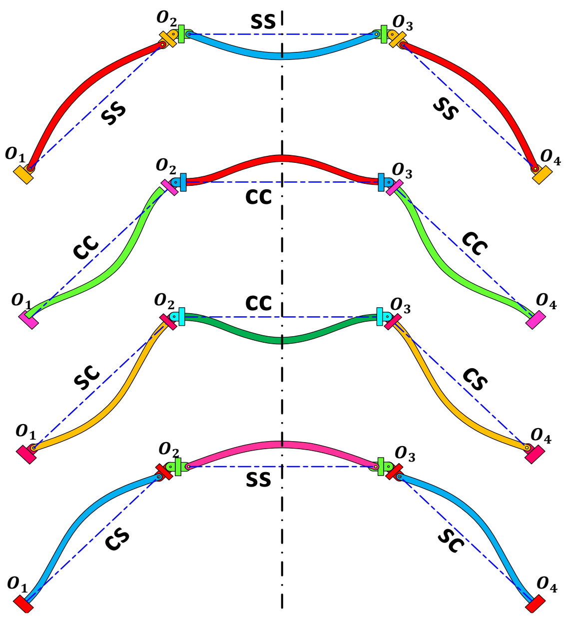
شکل ۲ ربات الاستیک سه‌لینکی در حال سقوط

در شبیه‌سازی، تشخیص دقیق لحظه برخورد از اهمیت به‌سزایی برخوردار است؛ زیرا اگر لحظه برخورد به درستی تشخیص داده نشود، بالانس انرژی در سیستم مورد مطالعه به هم می‌خورد و منجر به نتایج غیر معقولی خواهد شد. برای مواجهه با این چالش الگوریتمی محاسباتی پیشنهاد شده است که با دقت $10^{-8}s$ لحظه برخورد را تشخیص می‌دهد. پس از ورود به فاز برخورد، معادلات دیفرانسیلی مربوط به این فاز، جایگزین معادلات دیفرانسیلی فاز پرواز شده و روند حل این دسته از معادلات حرکت تا لحظه جدایی مفصل برخورد کننده از سطح تماس ادامه خواهد یافت. مجددا پس از جدا شدن مفاصل برخورد کننده از سطح، بار دیگر معادلات دینامیکی فاز پرواز بارگذاری شده و فرایند حل تا زمان برخورد بعدی ادامه می‌یابد.

برای مطالعه اثر شکل مودها بر روی پاسخ سیستم، چهار سری شبیه‌سازی با استفاده از چهار دسته مودشیپ با شرایط مرزی متفاوت انجام شده است. از آنجایی که پیکربندی اولیه زنجیره رباتیکی مورد بررسی دارای خط تقارن عمودی است، مودشیپ‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند تا سیستم رباتیکی مورد مطالعه از نظر هندسی نیز، نسبت به این محور تقارن عمودی، متقارن باشد. برای این منظور، دسته اول شکل مودها برای هر سه لینک به فرم SS در نظر گرفته شده است (SS-SS-SS). دسته دوم از شکل مودها برای هر سه لینک به صورت CC هستند (CC-CC-CC). برای دسته سوم، شکل مود لینک اول SC، شکل مود لینک دوم CC و شکل مود لینک سوم CS در نظر گرفته شده است (SC-CC-CS). و نهایتا در دسته چهارم از شکل مودها، لینک اول دارای شکل مود CS، لینک دوم SS و لینک سوم SC می‌باشد (CS-SS-SC).

در جدول (۳)، مشخصات فیزیکی و پارامترهای لازم برای شبیه‌سازی سیستم مورد مطالعه ارائه شده است. همچنین در رابطه (۳۰)، شرایط اولیه بگونه‌ای انتخاب شده‌اند تا سیستم مورد بررسی در شروع حرکت نسبت به خط تقارن مرکزی، متقارن باشد.

$$q_1|_{t=0} = \frac{\pi}{6}\text{rad};\quad q_2|_{t=0} = -\frac{\pi}{6}\text{rad};$$
$$q_3|_{t=0} = -\frac{\pi}{6}\text{rad};$$
$$\delta_{11} = \delta_{21} = \delta_{31}|_{t=0} = 0; X_1|_{t=0} = (-0.5 - \sin(60))\text{m};$$
$$X_2|_{t=0} = 0.9\text{m};$$
$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3|_{t=0} = 0\frac{\text{rad}}{\text{s}};\quad \dot{\delta}_{11} = \dot{\delta}_{21} = \dot{\delta}_{31}|_{t=0} = 0;$$
$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2|_{t=0} = 0\frac{\text{m}}{\text{s}};$$
(۳۰)



شکل ۳ شکل شماتیک از مودشیپ‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی

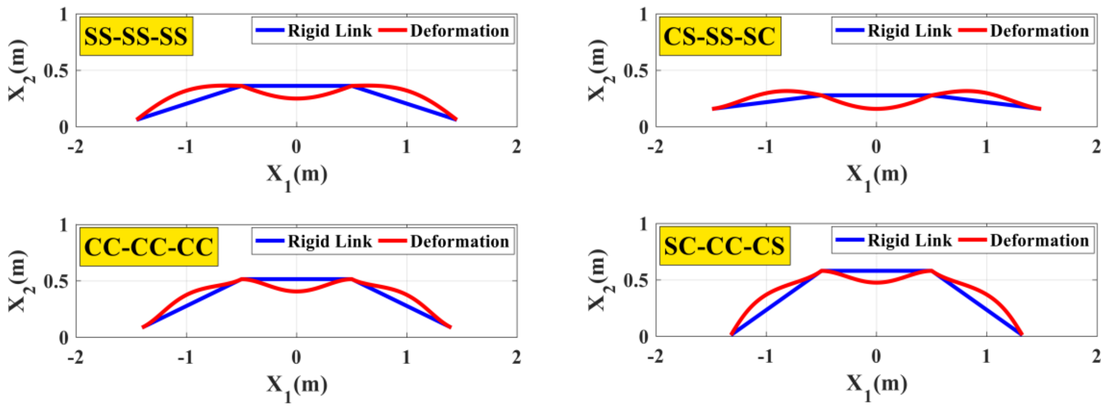
مدل دینامیکی ربات مورد مطالعه که در آن از چهار دسته شکل مود متفاوت جهت مدل‌سازی خاصیت انعطاف‌پذیری لینک‌ها استفاده شده است، برای مدت زمان $1.5s$ شبیه‌سازی شده است. در شکل (۴)، به‌منظور مشاهده بهتر تغییر شکل الاستیک لینک‌ها در لحظه $t = 0.7s$، این تغییر فرم‌ها بزرگنمایی شده‌اند.

همان گونه که گفته شد، شرایطی اولیه حرکت به گونه‌ای انتخاب شده است تا زنجیره رباتیکی دارای یک خط تقارن عمودی باشد (شکل ۳). لذا انتظار داریم تا تقارن ربات نسبت به این خط تا پایان شبیه‌سازی حفظ گردد.

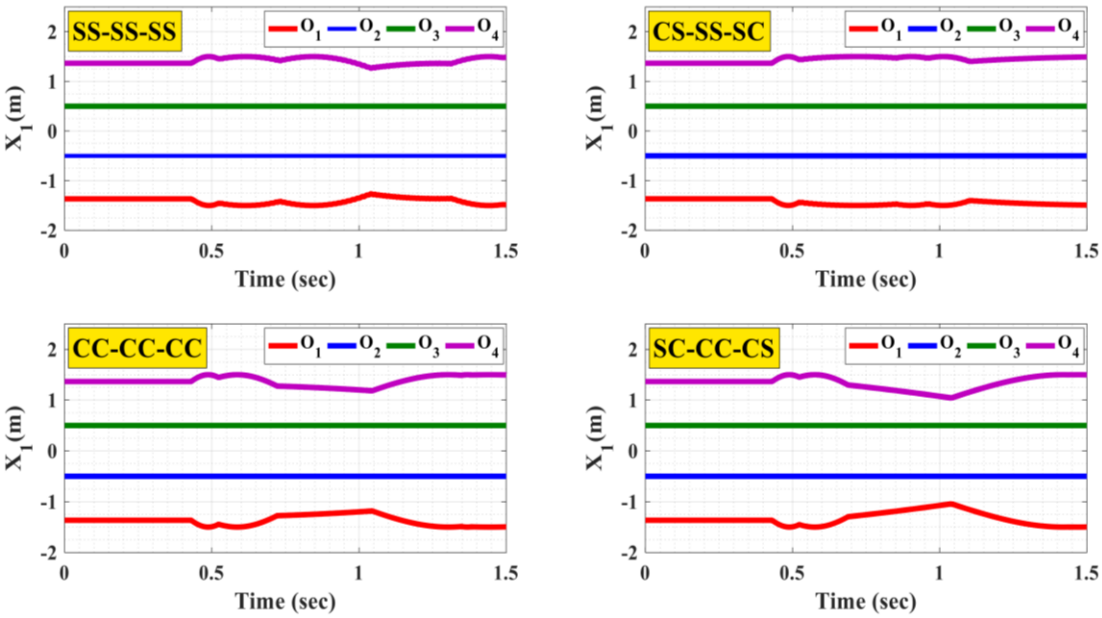
نمودار تغییر مکان مفاصل در جهت‌های X_1 و X_2 برای چهار دسته شکل مود به ترتیب در شکل‌های (۵) و (۶) رسم شده است. برای حفظ تقارن سیستم انتظار داریم تا موقعیت X_1 برای مفاصل O_1 و O_2 به ترتیب قرینه O_4 و O_3 بوده، و موقعیت X_2 برای مفاصل O_1 و O_2 به ترتیب برابر O_4 و O_3 باشند. این موضوع را می‌توان به وضوح در شکل‌های (۵) و (۶) مشاهده نمود.

جدول ۳ مشخصات سیستم رباتیکی دارای لینک الاستیک

Parameters	Value
طول لینک‌ها	$l_1 = l_2 = l_3 = 1\ \mathrm{m}$
سطح مقطع لینک‌ها	$A_1 = A_2 = A_3 = 3.75 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$
جرم واحد طول لینک‌ها	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}}$
ممان اینرسی سطحی لینک‌ها	$I_{x_3 1} = I_{x_3 2} = I_{x_3 3} = 4.883 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}^4$
ممان اینرسی جرمی بر واحد طول لینک‌ها	$J_1 = J_2 = J_3 = \begin{bmatrix} 5.8946 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9473 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9473 \end{bmatrix} \times 10^{-5}\ kg.m$
مدول الاستیسیته	$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^{11}\ \mathrm{N.m^{-2}}$
مدول برشی	$G_1 = G_2 = G_3 = 7.7 \times 10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}$
ضریب اصلاح برش	$k = 5/6$
ضریب کلوین- ویت	$K_{v1} = K_{v2} = K_{v3} = 125\ \mathrm{kg.m^{-1}.s}$
ضریب دمپینگ هوا	$\gamma = 0.025\ \mathrm{Kg.m^{-1}.s}$
شتاب گرانش	$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$
ضریب بازگشت‌پذیری	$c_r = 0.8$
پارامتر سختی تعمیم‌یافته	$K = 140 \times 10^6\ \mathrm{N/m^{1.5}}$
ضریب اصطکاک دینامیکی	$\mu_k = 0.1$
باند پایین تلرانس سرعت (آمبرزیو)	$v_0 = 0.0001\ m/s$
باند بالای تلرانس سرعت (آمبرزیو)	$v_1 = 0.001\ \mathrm{m/s}$



شکل ۴ تغییرشکل الاستیک لینک‌ها در ثانیه ۰/۷



شکل ۵ موقعیت مکانی مفاصل در جهت $^{ref}X_1$ بر حسب زمان

در شکل (۶) پاسخ بزرگ‌نمایی شده برای موقعیت X_2 مفاصل، در بازه زمانی $0.5s < t < 0.6s$ نیز نشان داده شده است. در این شکل‌های بزرگ‌نمایی شده به راحتی می‌توان ارتعاشات عرضی لینک‌ها را مشاهده نمود. نکته حائز اهمیت در این شکل‌ها، دامنه ارتعاشات بزرگ‌تر برای شکل مودها با شرایط مرزی ss-ss-ss یا cs-ss-sc نسبت به حالتی است که شرایط مرزی برای شکل مودها به صورت cc-cc-cc یا sc-cc-cs فرض شده است. با توجه به اینکه شرط مرزی گیردار حالت صلب‌تری در لینک ایجاد می‌کنند، این موضوع قابل پیش‌بینی بود و در شبیه‌سازی نیز خود را نشان داده است.

مطابق بزرگ‌نمایی‌های انجام شده در شکل (۷)، در حالت ss-ss-ss یازده جفت برخورد (۲۲ عدد برخورد) صورت گرفته است. همان گونه که پیشتر گفته شد، معادلات سیستم هنگام برخورد از سختی بالایی برخوردار هستند. با این وجود، به‌رغم تعداد بالای برخوردها، تقارن شکل به‌خوبی حفظ شده است. این امر نشان از استخراج صحیح معادلات حرکت، و کارایی بالای الگوریتم محاسباتی توسعه داده شده دارد. با دقت در این شکل، برخوردهای چندگانه در یک بازه زمانی بسیار کوتاه مشاهده می‌گردد. به طور مثال، در اولین برخورد مفاصل O_1 یا O_4 با سطح زمین، بلافاصله دو برخورد دیگر با فاصله زمانی بسیار اندک از

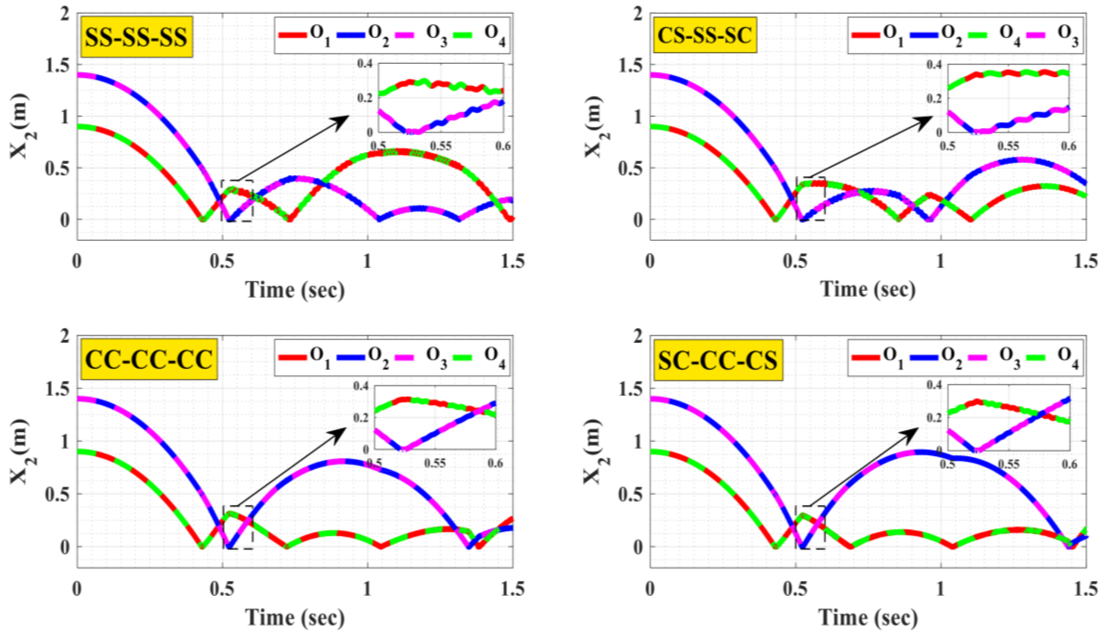
برخورد اول مشاهده می‌گردد. دلیل این امر ارتعاش ناشی از خاصیت الاستیک لینک‌ها است. در واقع اگر لینک‌ها صلب باشند، تنها یک برخورد با سطح زمین رخ می‌دهد.

در نمودارهای (۸) و (۹) سرعت مفاصل به ترتیب در جهت‌های X_1 و X_2 بر حسب زمان رسم شده است. با توجه به شکل اولیه ربات مورد مطالعه، بدیهی است مفاصل O_2 و O_3 هیچ گونه حرکتی در جهت X_1 نداشته و لذا سرعت این مفاصل در جهت مذکور صفر است. از طرفی به دلیل تقارن، انتظار داریم تا سرعت $\dot{X}_1$ مفاصل O_1 و O_4 قرینه هم باشند. این مطلب در نمودارهای شکل (۸) مشاهده می‌شود.

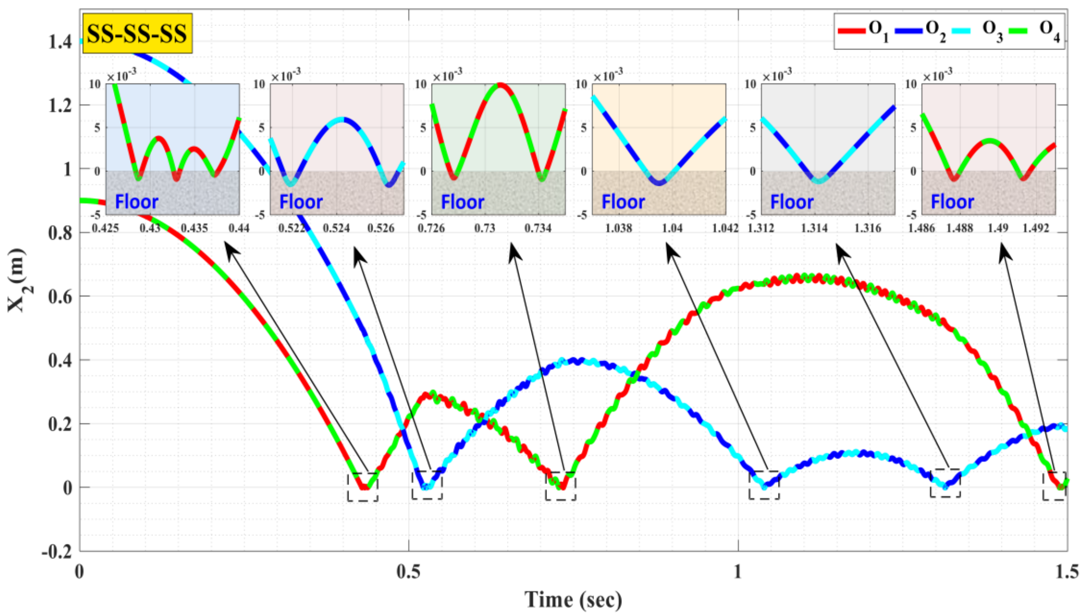
از سوی دیگر انتظار داریم تا سرعت مفاصل در جهت X_2 برای مفاصل O_1 و O_4 و همچنین O_2 و O_3 یکسان باشند. در شکل (۹) مشاهده می‌گردد که چگونه تقارن سیستم حفظ شده و سرعت مفاصل مورد نظر کاملا بر روی هم منطبق شده‌اند. نکته حائز اهمیت در نمودارهای شکل (۸) و (۹) در این است که فرکانس نوسانات در دو حالت cc-cc-cc و sc-cc-cs بیشتر از دو حالت ss-ss-ss و cs-ss-sc است.

در شکل (۱۰) وزن شکل مود لینک‌ها (δ_{11}، δ_{21} و δ_{31}) بر حسب زمان رسم شده است. مطابق انتظار δ_{11} و δ_{31} در هر یک از چهار قسمت شکل (۱۰) با هم برابرند. در شکل (۱۰) نیز به طور واضح‌تر می‌توان مشاهده نمود که دامنه نوسانات برای شکل مودها با شرایط مرزی ss-ss-ss و cs-ss-sc تقریبا سه برابر حالتی است که شکل مودها با شرایط مرزی cc-cc-cc و sc-cc-cs استفاده شده است.

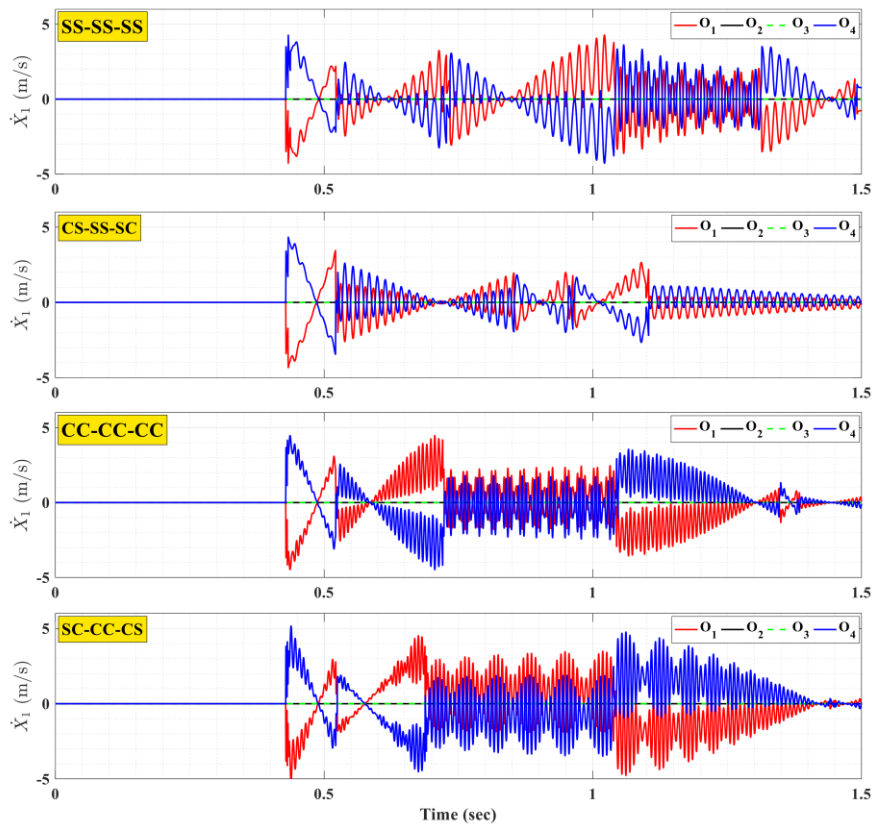
مدل‌سازی پدیده برخورد به روش مدل نیروی تماسی دارای این مزیت است که نیروی برخورد را به صورت تابعی پیوسته از میزان در هم فرورفتگی دو سطح در یکدیگر نتیجه می‌دهد. برای سیستم مورد بررسی، مفاصل O_1 و O_4 همزمان با هم و مفاصل O_2 و O_3 نیز همراه با هم به زمین برخورد می‌کنند. در نمودارهای شکل (۱۱) نیروی عمودی وارد بر مفاصل بر حسب زمان رسم شده است. بدیهی است تا مقدار این نیروها در مرحله پرواز صفر بوده و تنها در زمان بسیار کوتاه برخورد به صورت نیروی ضربه‌ای دیده شوند. با بزرگ‌نمایی لحظه برخورد می‌توان پیوستگی نیروها را مشاهده نمود. همچنین برابری نیروهای عمود بر سطح برای مفاصل O_1 و O_4 و مفاصل O_2 و O_3 به وضوح دیده می‌شود. در شکل (۱۱)، با بزرگ‌نمایی انجام شده بر روی نیروی عمودی حاصل از برخورد اول در حالت ss-ss-ss، سه نیروی مجزا ظاهر شده است. دلیل این موضوع را می‌توان در شکل (۷) پیگیری کرد. در این شکل، بزرگ‌نمایی بر روی برخورد اول نشان می‌دهد که به دلیل ارتعاش لینک، در مدت زمان بسیار اندکی سه برخورد پیاپی برای مفاصل O_1 و O_4 روی داده است. بنابراین در شکل (۱۱) نیز سه نیروی مجزا به ازای هر یک از این برخوردها به دست می‌آید.



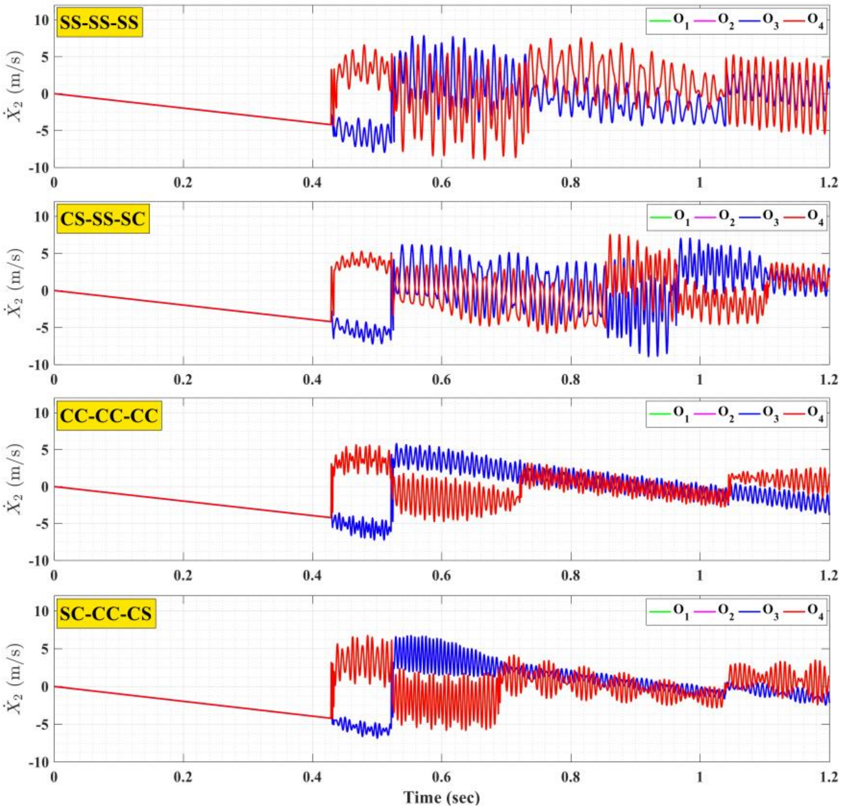
شکل ۶ موقعیت مکانی مفاصل در جهت ${}^{ref}X_2$ بر حسب زمان



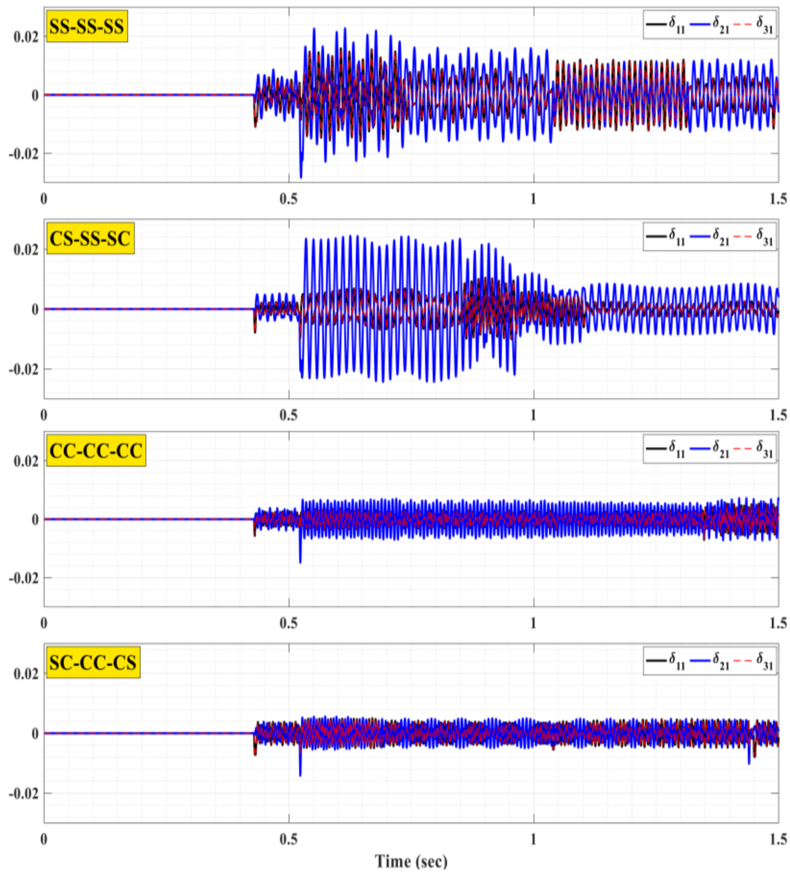
شکل ۷ نمایش تعداد برخوردها برای سیستم رباتیکی با زمین در حالت شکل مود SS-SS-SS



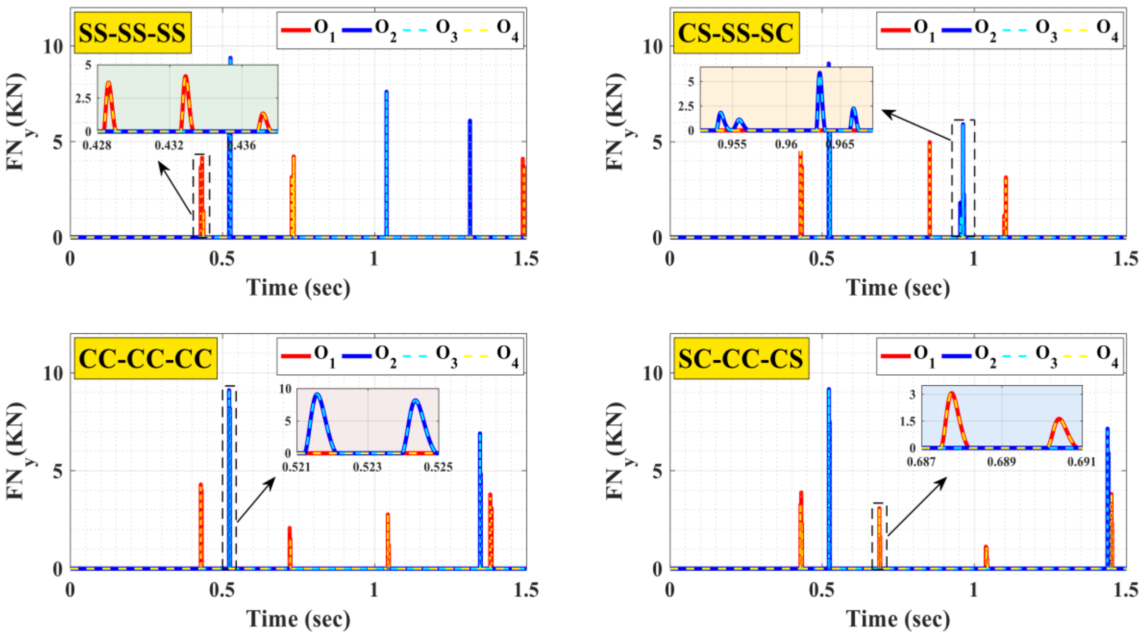
شکل ۸ سرعت مفاصل در جهت ${}^{ref}X_1$ بر حسب زمان



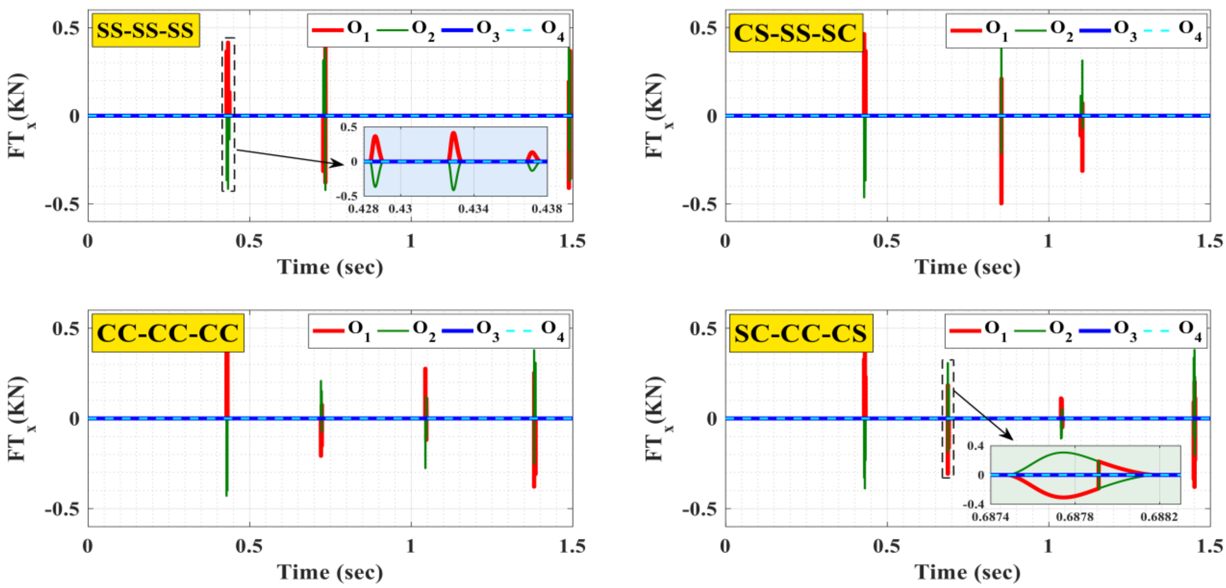
شکل ۹ سرعت مفاصل در جهت $^{ref}X_2$ بر حسب زمان



شکل ۱۰ وزن مودشیپ لینک‌ها بر حسب زمان



شکل ۱۱ نیروی عمودی اعمال شده بر مفاصل هنگام برخورد با زمین بر حسب زمان



شکل ۱۲ نیروی اصطکاک وارد بر مفاصل هنگام برخورد با زمین بر حسب زمان

از آنجایی که در مدل‌سازی دینامیکی سیستم، تأثیر نیروی اصطکاک بر حرکت در نظر گرفته شده، لذا انتظار می‌رود برای برخوردهایی که به صورت مایل رخ می‌دهد، نیروی اصطکاک نیز ظاهر شود. در شکل (۱۲) نمودار نیروهای اصطکاک وارد بر مفاصل بر حسب زمان رسم شده است. در صورت مقایسه شکل (۱۲) با شکل (۱۱) در می‌یابیم که تنها در لحظاتی که دو مفصل O_1 و O_4 با زمین برخورد کرده‌اند، نیروی اصطکاک ظاهر شده است. این در حالی است که به دلیل برخورد عمودی مفاصل O_2 و O_3 با زمین هیچ گونه نیروی اصطکاکی ایجاد نشده است. نیروی اصطکاکی که به دلیل برخورد مایل مفاصل O_1 و O_4 با زمین حاصل شده از نظر مقدار برابر، ولی از نظر علامت خلاف یکدیگر هستند. از طرفی به دلیل اینکه ضریب اصطکاک جنبشی

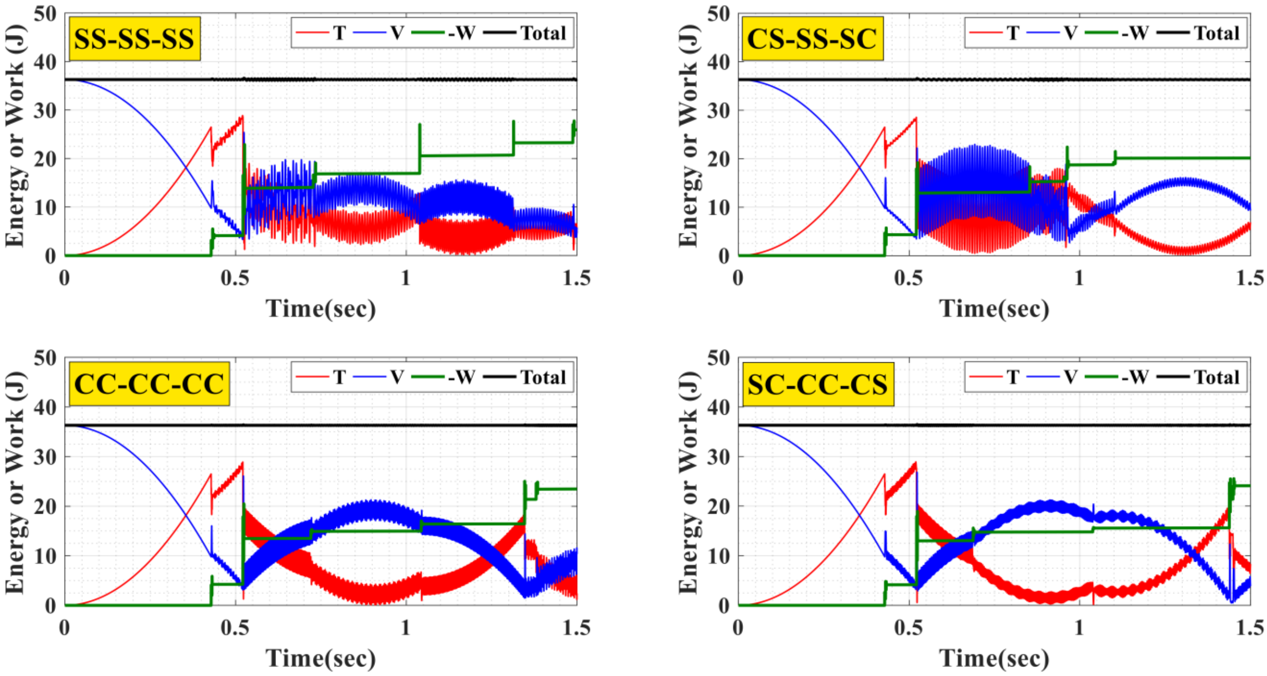
به کار گرفته شده در مدل نیروی اصطکاک (معادله ۲۴) $\mu_k = 0.1$ است، مقادیر به دست آمده برای نیروهای اصطکاک در شکل (۱۲) یک‌دهم مقادیر به دست آمده برای نیروهای عمودی برخورد هستند که در شکل (۱۱) نشان داده شده است.

برای سیستم مورد بررسی در این مقاله، قضیه کار و انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

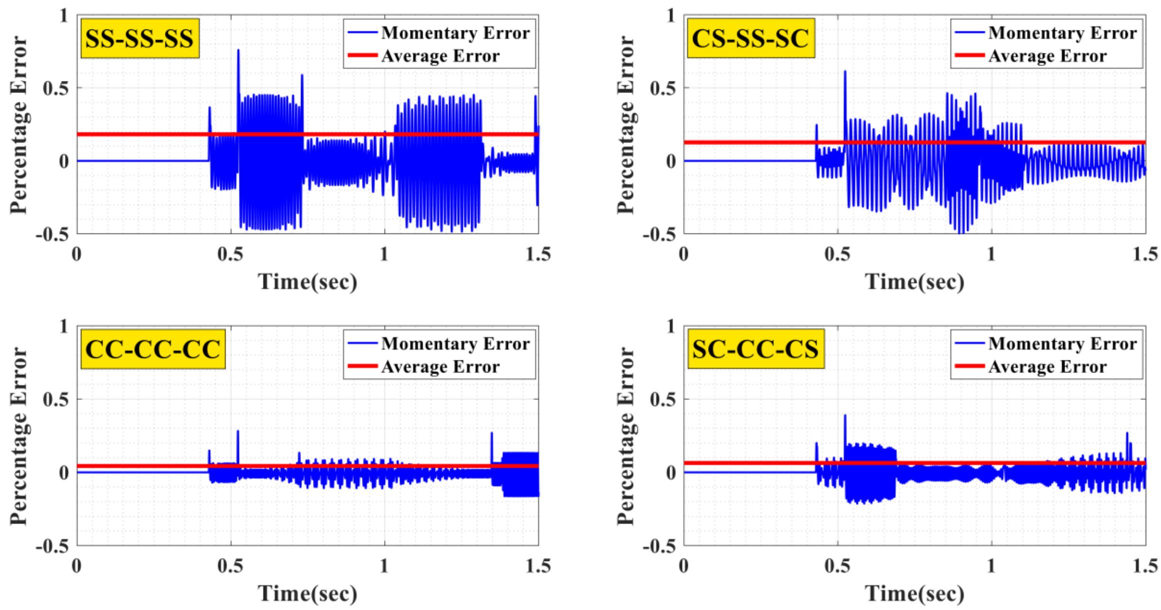
$$T_2 + V_2 - W_D - W_{F_N} - W_{F_T} = T_1 + V_1 = constant \quad (۳۱)$$

که در آن T انرژی جنبشی، V مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و الاستیک، W_D مجموع کار نیروهای میرایی هوا و سازه، W_{F_N} کار نیروی عمودی و W_{F_T} کار نیروی اصطکاک هستند.

از قضیه کار و انرژی نیز می‌توان برای بررسی درستی معادلات استخراج شده و اطمینان از کارکرد صحیح الگوریتم محاسباتی بهره جست. در شکل (۱۳) نمودار تغییرات انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، منفی کار نیروهای عمودی، اصطکاک و میرایی و مجموع آنها رسم شده است. همان گونه که در این شکل دیده می‌شود، نمودار مربوط به مجموع انرژی‌ها و کار تقریبا خطی صاف است. برای بررسی دقیق‌تر در شکل (۱۴) درصد خطا (رنگ آبی) و خطای متوسط ایجاد شده در طی فرایند شبیه‌سازی (خط قرمز) رسم شده‌اند. بیشترین خطای لحظه‌ای برای حالت ss-ss-ss به مقدار 0.75% رخ داده و همچنین درصد خطای متوسط از بیشترین میزان به کمترین مقدار به ترتیب مربوط به حالت ss-ss-ss با مقدار 0.18%، حالت cs-ss-sc با مقدار 0.13%، حالت sc-cc-cs با مقدار 0.06% و حالت cc-cc-cc با مقدار 0.04% است. با توجه به پیچیدگی سیستم‌های الاستیک و سخت‌شدگی معادلات دیفرانسیل سیستم در لحظات برخورد، میزان خطای ایجاد شده قابل چشم‌پوشی است. بنابراین می‌توان از صحت معادلات استخراج شده و حل صحیح آنها اطمینان حاصل کرد. همچنین با بررسی خطاهای متوسط ایجاد شده می‌توان نتیجه گرفت که هر چه به سمت شرایط مرزی مقیدتر حرکت کنیم، خطاها کمتر می‌شوند.



شکل ۱۳ تغییرات انرژی و کار نیروها بر حسب زمان



شکل ۱۴ درصد خطای انرژی سیستم بر حسب زمان

نتیجه‌گیری

هدف این تحقیق مدل‌سازی دینامیکی پدیده برخورد- تماس در یک سیستم رباتیکی دارای n لینک الاستیک است که توسط مفاصل دورانی ایدئال (فاقد لقی و اصطکاک) به هم متصل شده‌اند. همچنین برای بالا بردن دقت مدل‌سازی، میرایی سازه‌ای و میرایی هوا نیز در نظر گرفته شده است. هنگام برخورد ربات با سطح زمین، نیروهای عمود بر سطح و اصطکاک به معادلات حرکت سیستم که با استفاده از فرمولاسیون گیبس- اپل استخراج شده‌اند، اضافه می‌گردد. همچنین پدیده برخورد- تماس در این سیستم رباتیکی با استفاده از روش تنظیم شده فرموله شده است. از طرفی، رفتار الاستیک لینک‌ها نیز با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مدل‌سازی شده است.

مدل‌های متنوعی برای تحلیل پدیده برخورد- تماس به روش تنظیم شده و همچنین تعیین نیروی اصطکاک وجود دارد. بنابراین انتخاب مدل مناسب برای این دو نیرو از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. از همین روی با توجه به تحقیقات قبلی انجام شده توسط نویسندگان، مدل نیروی تماس هوو و گوو برای برخورد و مدل آمبروزیو برای اصطکاک برگزیده شدند.

به منظور مطالعه اثر شکل مودها با شرایط مرزی مختلف بر روی پاسخ سیستم، چهار دسته شکل مود متفاوت برای شبیه‌سازی انتخاب شده است. شرایط مرزی این شکل مودها به صورت تکیه‌گاه ساده، گیردار و یا ترکیب آنها به گونه‌ای انتخاب شدند تا سیستم از تقارن هندسی برخوردار باشد.

دو معیار برای کنترل کردن صحت معادلات دیفرانسیلی استخراج شده و درستی حل عددی این معادلات، حفظ تقارن سیستم در مدت زمان شبیه‌سازی و برقراری قانون کار و انرژی در کل فرایند شبیه‌سازی است. نمودارهای مختلف ترسیمی که از داده‌های شبیه‌سازی به دست آمده‌اند، این اطمینان را می‌دهند که سیستم تقارن خود را تا پایان زمان شبیه‌سازی با دقت بالایی حفظ کرده و قانون کار و انرژی نیز در مورد آن صادق است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از شکل مودها با شرایط مرزی مختلف، از نظر فیزیکی نیز کاملا مطابق انتظار است. نمودارهای درصد خطای انرژی سیستم به خوبی نشان می‌دهد که هر چه سیستم مقیدتر باشد (حالت شکل مود cc-cc-cc نسبت به حالت ss-ss-ss)، خطای محاسبات کمتر است. هم‌چنین از روی نمودارهای وزن شکل مود بر حسب زمان می‌توان دریافت که دامنه نوسانات برای حالت cc-cc-cc و sc-cc-cs کمتر از cs-ss-sc و ss-ss-ss است و همچنین فرکانس ارتعاشات برای حالت cc-cc-cc و sc-cc-cs بیشتر از cs-ss-sc و ss-ss-ss است.

واژه نامه

مدول الاستیسیته	Elastic Modulus
مدول برشی	Shear Modulus
ضریب اصلاح برش	Shear Correction Factor

ضریب دمپینگ هوا	Air Damping Coefficient	فرکانس ارتعاشات	Vibration Frequency
شتاب گرانش	Gravitational Acceleration	انرژی شتاب گیبس	Gibbs Acceleration Energy
ضریب بازگشت‌پذیری	Coefficient of Restitution	انرژی پتانسیل الاستیک سیستم	System Elastic Potential Energy
پارامتر سختی تعمیم‌یافته	Generalized Stiffness Parameter	میرایی سازه‌ای	Structural Damping
ضریب اصطکاک دینامیکی	Dynamic Friction Coefficient	مدل‌سازی دینامیکی	Dynamic Modeling
مدل‌های نیروی برخورد و اصطکاک	Impact and Friction Force Models		
روش هموار	Smoothing Method		
تئوری تیر تیموشنکو	Timoshenko’s Beam Theory		

تقدیر و تشکر

مراجع

[1] E. A. Alandoli, M. Sulaiman, M. Z. A. Rashid, H. N. M. Shah, and Z. Ismail, “A review study on flexible link manipulators,” *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering (JTEC)*, vol. 8, no. 2, pp. 93-97, 2016.

[2] H. Geniele, R. V. Patel, and K. Khorasani, “End-point control of a flexible-link manipulator: theory and experiments,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, no. 6, pp. 556-570, 1997. https://doi.org/10.1109/87.641401

[3] T. Zebin, and M. S. Alam, “Dynamic modeling and fuzzy logic control of a two-link flexible manipulator using genetic optimization techniques,” In *2010 13th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIT)*, pp. 418-423m, 2010. https://doi.org/10.1109/ICCITECHN.2010.5723894

[4] A. M. Shafei, and M. H. Korayem, “Theoretical and experimental study of dynamic load-carrying capacity for flexible robotic arms in point-to-point motion,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 38, no. 6, pp. 963-972, 2017. https://doi.org/10.1002/oca.2302

[5] M. H. Korayem, A. M. Shafei, and S. F. Dehkordi, “Systematic modeling of a chain of N-flexible link manipulators connected by revolute–prismatic joints using recursive Gibbs-Appell formulation,” *Archive of Applied Mechanics*, vol. 84, no. 2, pp. 187-206, 2014. https://doi.org/10.1007/s00419-013-0793-y

[6] L. Su, Q. Hu, and L. Zhang, “Recursive decentralized control for trajectory tracking of flexible space manipulators,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 39192-39206, 2019. *https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2906565*

[7] S. Erkaya, and İ. Uzmay, “Modeling and simulation of joint clearance effects on mechanisms having rigid and flexible links,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 28, pp. 2979-2986, 2014. https://doi.org/10.1007/s12206-014-0705-2

[8] W. W. Armstrong, “Recursive Solution to the Equations of Motion of n-link Manipulator,” In *Proc. Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 2, pp. 1343-1346, (1979).

[9] R. Featherstone, “The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 2, no. 1, pp. 13-30, 1983. https://doi.org/10.1177/027836498300200102

[10] C. C. Chang, and S. T. Peng, “Impulsive motion of multibody systems,” *Multibody System Dynamics*, vol. 17, no. 1,

pp. 47-70, 2007. https://doi.org/10.1007/s11044-007-9035-9

[11] Y. L. Hwang, "Recursive Newton–Euler formulation for flexible dynamic manufacturing analysis of open-loop robotic systems," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 29, no. 5, pp 598-604, 2006. https://doi.org/10.1007/BF02729114

[12] A. Mohan, and S. K. Saha, "A recursive, numerically stable, and efficient simulation algorithm for serial robots," *Multibody System Dynamics*, vol. 21, pp. 1-35, 2009. https://doi.org/10.1007/s11044-008-9122-6

[13] D. S. Bae, and E. J. Haug, "A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics: Part i. open loop systems," *Journal of Structural Mechanics*, vol. 15, no. 3, pp. 359-382, 1987. https://doi.org/10.1080/08905458708905124

[14] C. D. Zhang, and S. M. Song, "An efficient method for inverse dynamics of manipulators based on the virtual work principle," *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, no. 5, pp. 605-627, 1993. https://doi.org/10.1002/rob.4620100505

[15] K. Yamane, and L. Nakamura, "O (N) forward dynamics computation of open kinematic chains based on the principle of virtual work," *IEEE International Conference on Robotics and Automation,* vol. 3, pp. 2824-2831, 2001. https://doi.org/10.1109/ROBOT.2001.933050

[16] H. R. Hertz, "*Uber die Beruhrung fester elastischer Korper und Uber die Harte",* Berlin: Verhandlung des Vereins zur Beforderung des GewerbefleiBes, (1882).

[17] K. H. Hunt, and F. R. E. Crossley, "Coefficient of restitution interpreted as damping in Vibroimpact," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, no. 2, pp. 440-445, 1975. https://doi.org/10.1115/1.3423596

[18] R. G. Herbert, and D. C. McWhannell, "Shape and frequency composition of pulses from an impact pair," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 99, no. 3, pp. 513-518, 1997. https://doi.org/10.1115/1.3439270

[19] T. W. Lee, and A. C. Wang, "On the dynamics of intermittent-motion mechanisms. Part 1: dynamic model and response," *Journal of Mechanical Desing*, vol. 105, no. 3, pp. 534-540, 1983. https://doi.org/10.1115/1.3267392

[20] H. M. Lankarani, and P. E. Nikravesh, "A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems," *Journal of Mechanical Desing*, vol. 112, no. 3, pp. 369-376, 1990. https://doi.org/10.1115/1.2912617

[21] P. Flores, M. Machado, M. T. Silva, and J. M. Martins, "On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics," *Multibody system Dynamics*, vol. 25, pp. 357-375, 2011. https://doi.org/10.1007/s11044-010-9237-4

[22] M. Gharib, and Y. Hurmuzlu, "A new contact force model for low coefficient of restitution impact", *Journal of Applied Mechanics*," vol. 79, no. 6, pp. 064506, 2012. https://doi.org/10.1115/1.4006494

[23] S. Hu, and X. Guo, "A dissipative contact force model for impact analysis in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*," vol. 35, pp. 131-151, 2015. https://doi.org/10.1007/s11044-015-9453-z

[24] J. Alves, N. Peixinho, M. T. da Silva, P. Flores, and H. M. Lankarani, "A comparative study of the viscoelastic constitutive models for frictionless contact interfaces in solids," *Mechanism and Machine Theory*," vol. 85, pp. 172-188, 2015. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.11.020

[25] Xu. Zhang, and Xi. Zhang, "A comparative study of planar 3-RRR and 4-RRR mechanisms with joint

clearances," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 40, pp. 24-33, 2016. https://doi.org/10.1016/j.rcim.2015.09.005

[26] J. Lee, E. Bakolas, and L. Sentis, "Trajectory Generation for Robotic Systems with Contact Force Constraints," In *2019 American Control Conference (ACC)*, pp. 671-678, 2019. https://doi.org/10.23919/ACC.2019.8815154

[27] L. Yang, X. Zhang, and Y. Huang, "Dynamic analysis of open-loop mechanisms with multiple spatial revolute clearance joints," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 233, no. 2, pp. 593-610, 2019. https://doi.org/10.1177/0954406218757810

[28] A. M. Shafei, and H. R. Shafei, "Considering Link Flexibility in the Dynamic Synthesis of Closed-Loop Mechanisms: A General Approach," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 142, no. 2, pp. 021004, 2019. https://doi.org/10.1115/1.4045457

[29] Z. A. Khan, V. Chacko, and H. Nazir, "A review of friction models in interacting joints for durability design," *Friction*, vol. 5, pp. 1-22, 2017. https://doi.org/10.1007/s40544-017-0143-0

[30] E. Pennestrì, V. Rossi, P. Salvini, and P. P. Valentini, "Review and comparison of dry friction force models," *Nonlinear Dynamics*, vol. 83, pp. 1785-1801, 2016. https://doi.org/10.1007/s11071-015-2485-3

[31] H. Olsson, K. J. Åström, C. C. de Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky, "Friction models and friction compensation," *European Journal of Control*, vol. 4, no. 3, pp. 176-195, 1998. https://doi.org/10.1016/S0947-3580(98)70113-X

[32] C. A. Coulomb, "Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages," *Bachelier*, 1821.

[33] A. Morin, "*New friction experiments carried out at Metz in 1831–1833*: French Roy," 1833.

[34] R. Stribeck, "Die wesentlichen eigenschaften der gleit-und rollenlager," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, vol. 46, pp. 1341-1348, 1902

[35] L. C. Bo, and D. Pavelescu, "The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion," *Wear*, vol. 82, no. 3, pp. 277-289, 1982. https://doi.org/10.1016/0043-1648(82)90223-X

[36] D. Karnopp, "Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 107, no. 1, pp. 100-103, 1985. https://doi.org/10.1115/1.3140698

[37] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. C. de Wit, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083-1138, 1994. https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90209-7

[38] D. C. Threlfall, "The inclusion of Coulomb friction in mechanisms programs with particular reference to DRAM au programme DRAM," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 13, no. 4, pp. 475-483, 1978. https://doi.org/10.1016/0094-114X(78)90020-4

[39] J. A. C. Ambrósio, "Impact of rigid and flexible multibody systems: deformation description and contact models," *In Virtual Nonlinear Multibody Systems*, pp. 57-81, Springer, Dordrecht, 2003. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0203-5_4

[40] E. T. Whittaker, "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies," *Cambridge University Press*, 1988. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608797

[41] O. A. Bauchau, and C. Ju, "Modeling friction phenomena in flexible multibody dynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 50-51, 2006. https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.08.013

[42] C. Pereira, J. Ambrósio, and A. Ramalho, "Implications of contact parameters on the dynamics of chain drives," *Key Engineering Materials*, vol. 572, pp. 367-370, 2014. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.572.367

[43] E. Corral, F. Marques, M. J. G. García, P. Flores, and J. C. García-Prada, "Passive walking biped model with dissipative contact and friction forces," *European Conference on Mechanism Science*, pp. 35-42, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98020-1_5

[44] Z. Qian, D. Zhang, and C. Jin, "A regularized approach for frictional impact dynamics of flexible multi-link manipulator arms considering the dynamic stiffening effect," *Multibody System Dynamics*, vol. 43, no. 3, pp. 229-255, 2018. https://doi.org/10.1007/s11044-017-9589-0

[45] M. Taheri, and H. Faraji, "Investigation of the Influence of Input Parameters of the HK Friction Model on the Critical Force and Time in the Displacement of a Gold Nanoparticle," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 35, no. 4, pp. 1-16, 2023. (In Persian) httsp://doi.org/10.22067/jacsm.2023.80792.1160

[46] M. Taheri, and Z. Eghdami, "Using Novel Friction Models to Investigate the Mechanical Properties of Cancerous Liver Tissue," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 36, no. 37, pp. 107-122, 2024. (In Persian) httsp://doi.org/10.22067/JACSM.2024.87206.1245

[47] B. Dadashzadeh, S. A. Mostafavi, and A. Allahverdizadeh, "Dynamic Modeling and Optimal Step Planning for a Real Bipedal Robot Based on the Spring-Loaded Inverted Pendulum Model and Compass Gait," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 31-50, 2018. (In Persian) https://doi.org/10.22067/fum-mech.v30i1.67602

[48] S. N. Nabavi, and J. Enferadi, "Implementation of the Gibbs-Appell Method in the Dynamic Analysis of a New Hybrid Serial-Parallel PP-(3RSS-PS) Robot," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 36, no. 1, pp. 77-92, 2024. (In Persian) https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.83429.1193

[49] S. M. Vardi-Koolaee, M. Bamdad, and B. Fathi, "Investigation of the Effects of Hinged Joint Clearances on the Kinematic Behavior of a 3RPR Planar Parallel Robot," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 31, no. 1, pp. 39-52, 2020. (In Persian) https://doi.org/10.22067/fum-mech.v31i1.85234

[50] N. Jafarzadeh, M. Zehsaz, and M. Sadeghi, "Vibration-based Fault Diagnosis of Cylindrical Shells Based on Mode Shape Curvature," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 119-128, 2018. (In Persian) https://doi.org/10.22067/fum-mech.v30i1.58045

[51] J. Safehian, and A. R. Akbarzadeh, "Kinematics and Dynamics of a Snake-like Robot in Worm-like Movement on an Inclined Surface," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol. 24, no. 1, pp. 71-86, 2012. (In Persian) https://doi.org/10.22067/fum-mech.v24i1.21493

[52] M. Aalipour, A. Mokhtarian, and H. Karimpour, "Nonlinear Motion Control of a Spherical Robot on an Inclined Surface Based on Feedback Linearization Method," *Journal of Applied Computational Science in Mechanics*, vol.

31, no. 2, pp. 91-104, 2020. (In Persian) https://doi.org/10.22067/fum-mech.v31i2.74433

[53] L. Skrinjar, J. Slavič, and M. Boltežar, "A review of continuous contact-force models in multibody dynamics," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 145, pp. 171-187, 2018. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.07.010

[54] M. Ahmadizadeh, A. M. Shafei, and M. Fooladi, "A recursive algorithm for dynamics of multiple frictionless impact-contacts in open-loop robotic mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 146, pp. 103745, 2020. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103745

[55] F. Marques, P. Flores, J. P. Claro, and H. M. Lankarani, "A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 86, pp. 1407-1443, 2016. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2999-3

[56] M. W. D. White, and G. R. Heppler, "Vibration modes and frequencies of Timoshenko beams with attached rigid bodies," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 62, no. 1, pp. 193-199, 1995. https://doi.org/10.1115/1.2895902